数：科学的语言

——为有文化而非专攻数学的人写的评论性概述

[美] T·丹齐克著　苏仲湘译　·　上海教育出版社



Tobias Dantzig

NUMBER

THE LANGUAGE OF SCIENCE

London

George Allen & Unwin Ltd.

根据伦敦乔治·爱伦及昂文有限出版公司1938年第三次修订版译出

图书在版编目（CIP）数据

数：科学的语言／（美）丹齐克著；苏仲湘译．—上海：上海教育出版社，2000.11
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-7116-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.①丹…②苏…　Ⅲ.数学史-世界
Ⅳ.011

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第42466号

通俗数学名著译丛

数：科学的语言

——为有文化而非专攻数学的人写的评论性概述

［美］T·丹齐克　著

苏　仲　湘　译

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行

（上海永福路123号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海商务联西印刷厂印刷

开本850×1156　1/32　印张8.75　插页4　字数202,000

2000年12月第1版　2000年12月第1次印刷

印数1—5,100本

ISBN 7-5320-7116-2/G·7272　定价：（软精）17.10元

迎接2000数学年

陳省身 1997

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为**“世界数学年”**，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系.

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降.在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

译者的话

本书作者托比亚斯·丹齐克(Tobias Dantzig)原籍为沙俄统治下的立陶宛,1884年生,曾在巴黎大学求学,1910年去美国,后留居美国,入美国籍,先后在哥伦比亚大学、约翰·霍普金斯大学、马里兰大学等校讲授数学.他于1930年出版本书,后又经修订,增写了二十六个附录,使其内容更加充实.本书据1938年第三次修订版译出.

本书共分十二章,简要内容如下:

第1章,谈数的语言的起源:它从人和动物的数觉谈起,谈到计数和数概念的产生,谈到一一对应和匹配的原理,介绍了基数、序数,几种主要的数制,二进制、五进制、二十进制以及十进制等.它还旁及莱布尼茨从二进制产生的"用一,从无,可生万物"的唯心主义哲学观点,希腊普罗塔哥拉的"人是万物的尺度"的名言,以及数制与人类十指的关系等等.

第2章,谈算术符号:其中谈到命数法,谈及账板和算盘,谈到空位和位置原则.它谈到印度人民发现零的伟大意义,谈到当时作为一个新生事物的阿拉伯数字在不少地方遭到禁止的现象等等.它对新思想、新事物在历史上的摸索前进,作了生动具体的记述.

第3章,谈整数:其中对数论,包括哥德巴赫猜想、费尔马问题等,作了全面的介绍.对希腊的算学,包括毕达哥拉斯派的数哲学,对古代的数字崇拜(其中提到中国的《洛书》)以及当时广

泛流行的字数术等，都有引人入胜的描绘.

第4章，谈无限：它讨论了数学上的无限概念，对数学推理法、演绎法、归纳法、数学归纳法乃至公理学等推理原则都有深入浅出的说明.文中节录了数学家、唯心主义哲学家彭加勒《数学推理的本质》的论文，宣称数学的判断只是“对心灵的能力的一种肯定”，表现了作者本人的唯心观点.

第5章，谈有理数：它对古代埃及、希腊、印度、阿拉伯在代数上的探索和进展，作了广泛的叙述，一直谈到文艺复兴及其以后的发展.它叙述了字母记号在代数式中的使用，通过数学符号的运算，建立了有理数域，扩大了数概念.它介绍了作为数域推广的基本原则的固本原则，数学算术化的进程，并涉及了罗素和怀特海的《数学原理》一书及以他们为代表的学派的观点.

第6章，谈无理数：它从毕达哥拉斯学派的观点谈起，谈到数和点的对应，表明数的概念必须扩大和能够扩大.它介绍了印度、阿拉伯人的方程式方根解，介绍了无理数的发现，以至提起了群论.它对古希腊以直尺圆规求解的三大数学名题作了详尽的介绍，描述了代数数、超越数的发现，并对古代数学界在这些问题上的探索和寻求，勾画出主要的轮廓.

第7章，谈连续性：本章完整地介绍了古希腊埃利亚学派的有名的芝诺四论，从而论述了无限算法、极限、无限小等问题，介绍了牛顿和莱布尼茨开拓的微积分理论，包括唯心主义哲学家贝克莱的反对意见等.

第8章，谈无限算法：着重介绍了数序、收敛、极限、连分数等内容，介绍了康托尔的无理数理论，它指明有理无限数列的极限构成了实数域.

第9章，谈实数：介绍了康托尔的连续统理论，又从点数对应的原理，介绍了狄德金的无理数理论.作者在阐述这些数学理论时，宣扬了自然不跳跃，时间不跳跃的哲学观点，鼓吹进化，反对突变，认为连续和因果就是时间的主要内容，并表示时间和空

间都可以通过心灵动作来填补空隙，最后以数统治宇宙作为这一章的结语.

第10章，谈复数：它通过方程式求方根解，介绍了复数、虚数的发现，并详细介绍了笛卡尔的解析几何的理论，指明了这些数的具体形象.它还谈到了复变函数论、投影几何、非欧几何、理想数、矩阵等一系列发展.

第11章，谈集合：它阐述了康托尔的无限集合理论，包括无限集合的多寡性的意义、无限集合的一一比配、无限集合的势，以及无限集合中基数相同而顺序不同的序型理论等.它说明了在无限集合中，部分不比整体小，短线上的点不比长线上的点少，部分与整体之势相等，并介绍了测量无限集合的几个基数(势)a,c,f等.文中还介绍了伽利略关于无限集合的科学对话.

第12章，谈数学观念的实在性：作者在本章着重阐述了他的哲学观.他宣称无限分割和无限扩延都是不为经验所认许的；鼓吹实在性不过是组织、整理和引导人们的经验的幻景，其作用在于保持和增长人类的智力生活等等.他直截宣称，意识外的绝对不变的世界，只存在于神学推理.他在论述主观实在和客观实在时，提到赫尔姆霍茨、马赫诸人的主张，并表示和他们并不是一家，实际上，从他所表明的见解显示，他们并无本质的区别.

本书出版后，在欧美受到好评.第二次世界大战后，捷克斯洛伐克还重印过此书.爱因斯坦对此书有良好的评价.尼赫鲁也曾在他的著作中加以援引.

如上所述，本书内容主要是介绍数的概念的发展史.作者是本世纪初的资产阶级学者，自不认识和赞同在文化创造中，劳动群众的作用，实践的作用.他只是就观念论观念，孤立地综述思想和文化的先后嬗演，而且其中多有谬误之处.但就其对数学思想的发展过程的阐述而论，却脉络清明，条理详晰，抑且目光四射，取材广博，兼引文史，庄谐互出.这本书是一本数学书，科学书，但又不止于一本数学书或科学书.作者面向广泛读者，写得

深入浅出，一般知识界循序而进，都能看懂．因此，作者对本书有一个副标题，称它是"为有文化而非专攻数学的人写的评论性概述"．其特点是，从文化的角度、思想的角度乃至哲学的角度来谈数学的发展．它广泛撷引了人类千百年来数学探求的成果，从古代埃及、中国、希腊、印度、阿拉伯广泛取材，一直谈到文艺复兴，谈到近代的欧美．它描述了思想发展过程的摸索、蹒跚和奋力前进，嘲笑了愚妄和保守，赞扬了人们的前进．它实在可以作为一部专题的文化史、思想史来阅读，作为一部鼓舞人们不断求进展的读物来阅读．

从哲学的角度来看此书，亦复饶有意义．书中触及不少既有数学意义又有哲学内涵的范畴，如连续、无限、实在性以至时间、空间等，这本身就构成了哲学意义的讨论．本书在论述思想发展过程中，自然时时流露和表述其哲学的观点．它夹叙夹议，多方征引，以张其说，其中包括一些古代哲学中的重要论题和文献，例如，古希腊埃利亚学派的芝诺四论．这是和我国惠施学派提出的二十一事相仿佛、引起了广泛议论的古代自然科学－哲学的有名命题，书中对此作了完整的征引和介绍，并根据作者本人的观点，从数学立场进行了分析和解答．又如对有名的唯心主义哲学家、也是数学家的彭加勒、贝克莱等的一些论点和材料，书中都有频繁的援引和介绍，这样就反映了哲学史中有关自然科学观点，有关数的观念的一个侧面的面貌和情况．当然作者本人的哲学观点只是一家之言，读者在阅读这部分时应加以分析和鉴别，是无庸赘说的．

本书在欧美虽颇知名，然在我国尚无译本．我在解放前夕译出，曾经开明书店同意出版，但是当时经济凋敝，纸价腾踊，印刷困难，虽已排出纸型，迄未能印出．解放后，开明改组合并，在当时的情况下，译稿遂搁置了下来．在十年浩劫过后的今天，文化和学术领域中，云蒸霞蔚，生意盎然．我感到此书不论作为一本较有系统的数学书或专题的文化史、哲学参考书，介绍给我国读

者,都是有价值的.其内容生动广博,深浅咸宜,专门家可从中撷取丰富的材料,青少年和一般读者可从中得到对数学乃至文化的发展和了解,实可有助于穷搜原委,开阔眼界,丰富学养,剖析学理,有助于学术的探求和发展,故而我重新对译稿进行了校改.际此行将付梓之日,摩挲新纸,感念千端.我作为一个曾在数学征途上跋涉过的老兵,虽因工作之需,早已解鞍他去,但昔日和师友们共涴征尘的甘辛和憧憬,是很难忘怀的.这就要回溯到40年代,我在湘西辰溪埜头垴荆榛小山上求学的日子.当时旧中国的科学山林是多么的艰困和寂寞啊,大学的一个数学年级往往只有一二人,何况又是在那抗战烽火正酣、国内夜气如磐的时节!但是,师友数人,日夕相对,却一直相期共勉:勇于求真,安于贫艰,不可自已.在轧轧作响的小楼上,在仅施素纸的板窗前,我们曾经多次度过探讨和思辨的时光.爱因斯坦和罗素的命题曾经多少次闯入我们的话题,本书的名理也曾经一再浮入我们的论议,这也就是促使我后来迻译此书的一个动力.师友们身丁子夜,却一直憧憬着祖国的光明,憧憬着科学的春天,而现在,祖国的光明和科学的春天已经笼罩着我们全部的生活了.在这里,我深深怀念一代宗师,毕生教诲勤勤的先师熊正理教授,深深怀念学摄百家,善于启发的先师崔明奇教授,深深怀念献身数学,不立室家,后讲学异国,久断音闻的座师陆慎仪教授,深深怀念同窗中才思腾踔,一如陈千秋之在万木草堂,后在十年浩劫中被迫害,沉江早逝的亡友罗守琳同志,我更深深景念教泽绵长,德寿双隆,至今仍在开拓数学新壤的座师余潜修教授.一卷之微,俄历多年,所抛心力,弥怀师友之源,扪素笺而思旧泽,拈一花而庆繁春.谨以此帙奉献给敬爱的师友,以表寸怀,并欢今日.是为叙.

苏 仲 湘

一九八四年夏于蜗居凉台红茑萝花,紫牵牛花,黄苦瓜花侧畔

我们将继续实现一个灿烂的梦
——译者再志

多少年来，我曾经有过许多美好的梦：入世的梦、烽火的梦、改变客观世界的梦、主观浪漫的梦…….有的梦大，有的梦小；小梦自己默默的做，大梦和大伙儿一同去实现.

其中一个灿烂的梦是，科学春天的繁荣梦；它也包括一个小梦，数学王国的拓展梦.

从“五四”的时代起，大家就在呼唤着赛先生，还有它的至友德先生，翩然来到这个东方文明古国，帮助大家圆成一个美好的春之梦.

风云变幻，春在何方？是的，从上个世纪的80年代前后起，坚冰已经打破，春光正在发生.不过，春花春草的根下还是一层浅土，带来了阵阵沙尘暴之风的强烈程度仿佛还消减不大.

应当记住江泽民同志的这段话：“我国历史上虽然有着伟大而丰富的文明成果和优良的文化传统，但相对说来，全社会的科学精神不足也是一个缺陷.”

在新的千年的门坎上，在新的世纪的入口处，我们应当立下宏愿，把科学精神的火炬高高举起，使这片土地更加光明，更加温暖，更加沸腾，更加使人满足.

科教兴国，这就是我们的责任和方向.这是一个任重道远的事业，但又是我们必须实现的灿烂梦想.

而数学领域的驾驭和开拓则是发皇科学精神的应有之义.本书作者就说过：“有了数学在理论上发挥作用，然后各种发明

才为可能，这些发明的设计也是如此.”

手头这本关于数的著作和我发生因缘已有六十年了.它在西方学术界久有声誉.它疏通了人类从茫昧至今的关于数的意念之产生和发展的历史.它的内容虽然涉及数论专题和高等数学领域，但叙述起来，步步为营，由浅入深，层次分明，逻辑清晰，有中等文化水平的耐心读者是不难看懂的.特别是.它不是孤立的就数论数，而是着力于挖掘数的概念的演变过程中的思想本质和文明背景，它的笔触也就深入到文史哲学等广泛领域.西方哲学中的一些名理和清诤往往通过本书而奉献在读者面前.它实际上成为一本与专业领域有关的思想史、文明史.作者显然很喜欢一脉思想活水的奔流.他希望用本书援引读者过莽穿林，循流溯源，涵泳面前流波的渊渟之秀美和奔涌之坚毅.我们掩起卷来，既得到了水文知识，而且感受到爱知之乐.这也许可以说是本书最大的一个价值.

因此，我在40年代初期，在烽火连天，流亡在湘西沅水之滨的湖南大学校园内，当时取得国外书刊何等艰难，却意外地能读到本书，惊喜之情，回思宛如昨日.我和师友们做着一个又一个的明天的祖国的梦想.这本书当时成了镶嵌我们的梦的一个部件.

40年代末期，我终于译出了本书，并由开明书店慨然决定出版.只是由于时局的变动而未果.

80年代上期，商务印书馆决定正式出版此书.我将译稿重新全部通读校改，并按解放后的译名手册统一译名.印数不多.

现在，上海教育出版社组织大型数学科普系列——“通俗数学名著译丛”，这正符合数学大师陈省身所瞩望的：“迎接2000数学年”，是一个盛举.上海教育出版社同志愿将本书纳入这个译丛，配套成龙，俾使更广大的读者得以了解和接触本书，这是很好的事情.商务印书馆方面不反对.我十分赞成.

尼赫鲁是一位读书人.他在他的著作中引证了本书对“印度

无名氏在公元初期的几个世纪所发明的位置原则实在是一件有世界意义的大事”的论列，又引述了老子的玄言：“常无欲以观其妙，常有欲以观其侥.”还援引过猪八戒的名言：“依着王法打杀，依着佛法饿杀.”尼赫鲁认为，“科学正以它自己精确实验的观察方法向多方面迈进，扩大着所已经翔实证明了的知识领域，并且在过程中改变着人类的生活.”“它将仍然沿着它的指定的途径前进，因为这旅程是没有终结的.”“科学将继续追问着‘怎么样?’.当它找到了这答案，就会予人生以较大的满足和意义，并且也许在回答我们的‘为什么?’的问题上前进一步.”

而我们追问“为什么?”和“怎么样?”的漫长的努力，我们的诸多的美好梦想，包括科学的春天繁荣梦和作为科学的网络的数学探求梦，这些灿烂的梦想的继续实现，那也是不会中止的.这本译作便也仍是这些灿烂梦想的镶嵌物.今天，它又从一条新的途径，深入到读者中间去，对于增进科学精神，发扬思想活力，推动数学探究，当然都有裨益.我作为一个曾在数学行列中守卫过的年近八十的老卒，曾经在沙砾中找到这块宝石，把它拂拭过，镶嵌在华年的梦想中，现在再端出来，敬献给读者，希望读者将谛视它，赏鉴它，因为它果然是有光的.

苏 仲 湘

写于阳台边发芽而成长掇缀的

盆栽小橘树旁，时为二〇〇〇年夏日

“源头茫昧虽难觅，
活水奔流喜不休.”

——昂利·彭加勒

目 录

第1章 指 印

[1]

“古罗马历，一年月亮绕十个圈：
当时把这个数奉为至尊至上，
或者因为我们习惯了用手指来计数，
或者因为妇人怀胎十个月方才分娩，
再不然，就因为数字增到了十，
便回过头来，从一开始循环.”

——奥维德(Ovid)，
《岁时志》(Fasti)，第三卷.

1

人类在进化的蒙昧时期，就已经具有一种才能，这种才能，因为没有更恰当的名字，我姑且叫它为数觉.由于人有了这种才能，当在一个小的集合里边，增加或者减去一样东西的时候，尽管他未曾直接知道增减，他也能够辨认到其中有所变化.

数觉和计数不能混为一谈.计数似乎是很晚以后才有的一种收获，由后文可以知道，它牵涉到一种颇为复杂的心理过程.就我们所知，计数是一种人类独具的特性；另一方面，有若干种动物看来也具有一种和我们相类似的原始数觉.至少，有权威的关于动物行为的观测家持有这种主张，而且有很多实例支持这种理论.

例如，许多鸟类是具有这种数觉的.鸟巢里若是有四个卵，



那么可以安然拿去一个;但是如果拿掉两个,这鸟通常就要逃走了.鸟会用某种奇怪的方法来辨别二和三.但是这种才能不仅限[3]于鸟类.实际上,我们所知道的最惊人的例子要算叫作“独居蜂”(solitary wasp)的昆虫.这种母蜂在每个巢里下一个卵,并且在巢里面预先储藏了一批活的尺蠖,作为幼虫孵化后的食料.使人吃惊的是,各类独居蜂每巢里所放的尺蠖数目都是一定的:有些类放五条,有些放十二条,多的甚至于有二十四条的.最特别的是一种叫作蜾蠃(eumenus)的蜂,这种蜂雄的比雌的小得多.母蜂能用神秘的方法辨别孵化出来的幼虫是雄的还是雌的,并且据此相应地分配食品的数量;它并不去改变捕获物的大小和种类,只给雄卵储存五条尺蠖,给雌卵储存十条.

由于蜂类行为的规律化,而且这种行为和它的生命的基本机能有密切的关系,所以上述例子不如下面的例子来得更加令人信服.这里所举的鸟的行为,似乎已经处于自觉的边缘了.

有个田主决心要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦.他试了好多次想惊动它,始终没有成功:因为人一走近,乌鸦就离开了巢,飞开了.它栖在远远的树上守着,等到人离开了望楼,才肯飞回巢去.有一天,这田主定下了一个计策:两个人走进望楼,一个留着,一个出来走开了.但是乌鸦并不上当:它老等着,直到留在望楼里的人也走了出来才罢.这个试验一连作了几天:两个人,三个人,四个人,都没有成功.末了,用了五个人:也像以前一样,先都进了望楼,留一个在里面,其他四人走出来,离开了.这次乌鸦却数不清了;它不能辨别四与五,马上就飞回巢里去了.

[4]

2

这个例证可以引起两种反驳的意见.第一:具有这种数觉的动物只限于极少的几类,而在哺乳动物中就没有发现这种才能,甚至猿猴也好像没有.第二:就已经知道的一切事例而言,动物

数觉的范围实在太小，简直可以略而不论.

第一点意见我们是承认的.这确乎是一个值得注意的事实：识数的才能，不论是这种形式或那种形式，看来总是限于几种昆虫，几种鸟类和整个人类.对于狗、马和其他家畜所作的实验和观察，都不曾发现它们有什么数觉①.

至于第二点意见，却没有多大价值，因为人类的数觉范围也是十分有限的.寻常让一个文明人去辨别数目的时候，他总有意无意地用其他的技能，诸如对称图型读法、心计组合法、计数术等，来帮助他的直接数觉.特别是，计数已经变成我们智能的如此重要的组成部分，所以用心理学的方法来实验我们的关于数的知觉，实在是很困难的.但是，话虽如此，现在还是有了一些进展；根据精密安排的实验结果，不能不下结论说：普通文明人的直接视觉数觉，很少能超过四，至于触觉数觉，范围甚至还要小些.

人类学上关于原始民族的研究，加强了这个结论的可信程度.从这些研究得知，还没有达到屈指计数阶段的野蛮人，几乎完全没有关于数的知觉.澳洲、南海群岛、南美洲和非洲的许多部族都是如此.柯尔(Curr)对于澳洲的原始民族有过广博的研究，他以为只有很少的土人能够辨别四，处于野居状态中的澳洲 [5] 土人没有人能了解七.南非洲的布须曼(Bushmen)族，除了一、二和多之外，再没有别的数字了，而这三个字又是那么语调含糊，那些土人是否赋与了它们以明晰的意义，也还是个疑问.

我们决没有理由相信，我们的远祖有更高的天赋，却有许多理由使我们怀疑这种想法，试看各种欧洲语言，几乎都带有这种早期局限性的痕迹.英文的 thrice 和拉丁文的 ter，同样的有双重意义：三倍和许多.拉丁文的 tres(三)和 trans(超过)之间有着可信的联系；而法文的 très(甚)和 trois(三)也是如此.

数的产生，远在有史以前，详情已无法深究.究竟数的概念

① 参看附录 1：论动物和人的数觉.

是从经验里边产生的，还是仅仅凭藉经验之力，把早已隐藏在原始人心灵中的概念加以暴露而来的呢？这是一个吸引人的玄学问题，因而不在本书讨论的范围之内了.

如果我们用现代野蛮民族的智力情况来推断我们远祖的发展史，我们不能不承认，在开始的时候也是非常幼稚的.一种比鸟类高强不了多少的原始的数觉，就是产生我们数概念的核心.毫无疑问，如果人类单凭这种直接的数的知觉，在计算的技术上，就不会比鸟类有什么进步.但是经历了一连串的特殊的环境，人类在极为有限的数知觉之外，学会了另一种技巧来给他帮忙，这种技巧注定了使他们未来的生活受到巨大的影响.这技巧就是计数，并且，正是由于有了计数，我们赢得了用数来表达我们的宇宙的惊人成就.

3

[6] 有些原始语言对于虹的各种色彩都有专门的字，但是没有“色”这个字；又有些语言所有数字都有，只是没有“数”这个字.其他的概念也有这样的情况.在英文中，对于某些特种集合，有丰富的本国语言的表现方法，例如：flock（一群），herd（一帮），set（一套），lot（一堆），bunch（一束），分别适用于特殊的场合；然而Collection（集合）和 Aggregate（集）这两个字却是外来语.

具体的东西总在抽象的东西之先.罗素（Bertrand Russell）说：“不知道要经过多少年，人类才发现一对锦鸡和两天同是数字 2 的例子.”到现在我们还有不少的字来表达 2 这个概念，如：Pair，Couple，Set，Team，Twin，Brace 等等.

早期数概念的极端具体性，不列颠哥伦比亚的辛姆珊（Thimshian）族的语言是一个明显的例子.这种语言共有七种不同的数字：一种用于走兽和扁平的物体；一种用于时间和圆形的物体；一种是用来数人的；一种是用于树木和长形物体的；一种是用于小艇的；一种是用来测量的；还有一种是在没有特定对象

时计数用的.最后一种大概是后来才发展起来的.前几种必定是这族人还没有学会计数之前的早期遗物.

正是计数,才使具体的、不同质的表达多寡的概念结合为统一的抽象的数概念.前者是原始人的特点,后者则是数学发展的前提.

4

然而,我们说,不用计数技术,也可以得出一种合乎逻辑的明晰的数概念,这虽然好像奇怪,却确是可能的.

我们走进一个会堂.在我们面前的是两个集合:一个是会堂的座位,一个是出席的人.我们不用计数,就可以知道这两个集合是否相等,如果不相等,哪个大些.因为要是所有的座位都坐满了,同时没有人站着,我们不用计数就知道两个集合相等.要是座位已经满了,而仍旧有人站着,我们不用计数就知道人多而座位少了.

[7]

这种知识是从一个支配着全部数学的称为一一对应的方法

这个字的本身所含的绝对的意义.不过,由相对的数转变成绝对的数并不困难.唯一必需的只是作出各种模范集合,每个都代表一个可能的集合.等到要算某一集合的事物的个数的时候,只消在这些模范集合中,把能和它匹配的那一个找出来就成了.

原始人类就在身边的环境中找出这种模范集合来:鸟的翼可以代表数字二,苜蓿叶代表三,兽足代表四,自己手的手指代表五.在不少原始语言中,可以找到这种数字根源的实例.当然,[8]等到数的字一经造成并且采用之后,就和它原来所表示的物体一样地可以作为模范了.因为数的记号和它所假借的物名之间必须有所区别,结果自然而然地引起声音的改变,而长年累月之后,二者间的这种联系便渐被忘却了.人类愈来愈依赖语言,因此声音就代替了所表的形象,而原来的具体的模范集合便以数字的抽象形式而出现了.记忆和习惯又使这些抽象形式有了具体性,于是,就只用字来量度多寡了.

5

上面所叙述的概念叫作**基数**.基数所根据的是对应原则:它并不包含计数.即使标准集合的范围包罗万象,要是乱七八糟的排列着,还是不能够创造出一种计数术的.我们必须发明一种**数制**:就是说我们那些模范集合必须排成有前后次序的序列,这就是从小到大的序列,也就是*自然序列*:1,2,3,….数制一旦有了,**计数某一集合的事物**,就等于将集合中每个成员分别和**有顺序的次第的**自然序列中的一项相对应,一直到整个集合对应完了为止.对应于集合中的**最后**一个成员的自然序列的项,就称为这个集合的**序数**.

序数制可能采取天主教念珠[①]的具体形式,不过这当然不

① 这种念珠每小珠十个隔大珠一个,每串大小念珠数目共计165个.——译者

是本质的.只要将其前几个数字,按照有顺序的次第记住,再制定一个语音系统,使得能从任何一个较大的数读出它的后继数,那么序数制就出来了.

我们就是这么容易地从基数转到了序数,因此,两者好像是一件东西.现在如果要决定某一集合的事物的多寡,即它的基[9]数,我们不用再找一个模范集合麻烦地来作一一匹配了——我们只消将它加以计数就成了.数学的发展实在应当归功于我们知道了数的这两个方面的统一性.在实用上,我们虽然觉得基数很有用,但它不能创造出算术来.算术的运用就是依据我们总是可以由一个数数到它的后继数这一默认的假定出发的,而这个假定就是序数概念的本质.

因此,单凭匹配本身是不足以创造出一种计算方法的.设若不是我们能够将事物排列成有顺序的次第,进步就是不大可能的.对应和序列,这两大原理已经深深渗透进全部数学——不只是数学,实际是精密思想的全部领域——之中,交错地编织在我们数系的锦绣天衣之上.

6

这里,自然就会发生一个问题:这种基数和序数的微妙区别,在数概念的早期历史上,究竟有没有出现过呢? 我们不免要作这样的猜想:单由匹配而产生的基数,当在既要匹配又要顺序的序数之先.但是细致考查一下原始的文化和语言,我们找不出这种先后的证据来.只要有某种关于数的技术存在着,数的这两个方面就同时可以找到.

还有,只要有够得上称为计数术存在的地方,屈指计数也是一定有的,或者早一点,或者同时并见.在用手指的时候,人类借助于这个工具,就不自觉地从基数转进到序数.人们在表示某一集合包含四件事物的时候,会同时屈回或是伸出四个手指;如果他想计数一下这个集合,他就依次屈回或是伸出这些手指.在前[10]

一种情形，他用手指作为基数性质的模范集合；在后一种情形，则用来作一种序数制了.几乎在所有的原始语言中，都能找到计数的这种起源的确切遗迹.在大多数这类语言中，“五”这个数，就用“手”表示；而“十”则用“双手”，有时则用“人”来表示.甚至于有许多原始语言，四以下的数字和四个指头的名称完全一致.

比较进化了的语言，因为经过了长期的演变，字的原义逐渐消逝了.但是，在这里，“指印”并不罕见.将梵文的 Pantcha（五）和与其有关系的波斯文的 Pentcha（手）；将俄文的 Piat（五）和 Piast（伸手）试加比较，就可以知道了.

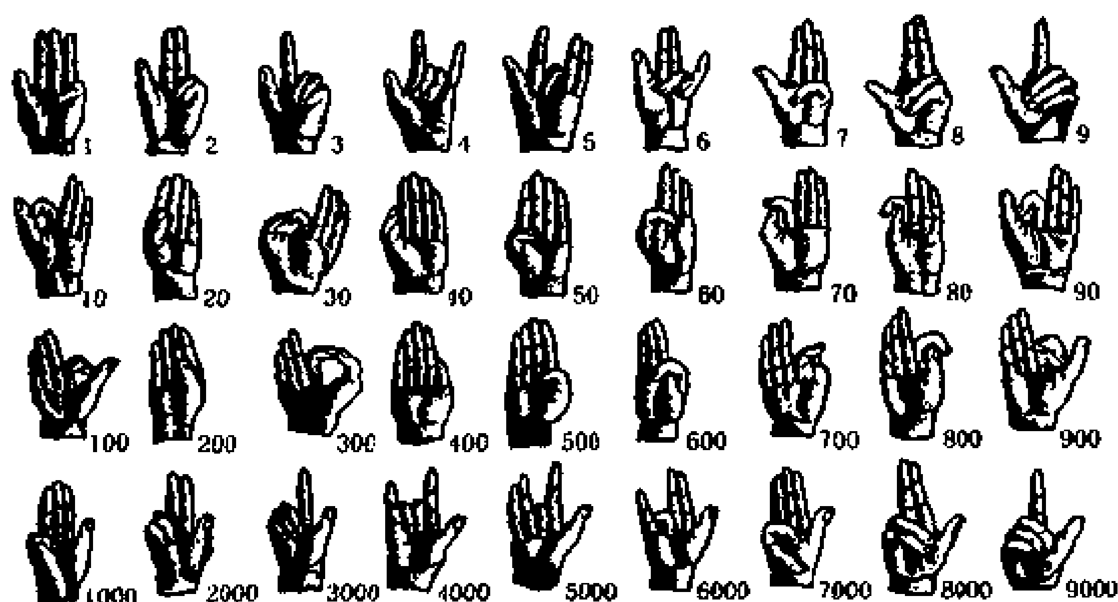
人类在计算方面之所以成功，应当归功于十指分明.就是这些手指，才教会人类计数，从而把数的范围无限地扩大开来.如果没有这套装置，人类对于数的技巧就不会比原始的数觉高出多少.因此，我们不无理由地说，要是没有手指，那么数的发展，以及随之而来的我们精神上的和物质上的进步所依据的精确科学的发展，也将毫无希望地处于低下的阶段.

7

在现代的文明人中，除了小孩初学计数的时候还用手指，除了我们自己有时候为了加重语气还用手指之外，屈指计数的技术已经被淘汰了.文字书写的出现，简便的命数法，以及教育的普及，使得这个技能成为陈旧和多余的了.在这种情形之下，我们自然容易低估屈指计数在计算史中曾经起过的重要作用.但是，不过在几百年以前，屈指计数在西欧还是如此风行，以致一[11] 本算术教本如果不包含屈指计数的方法，它便不能算是完全的.（见第9页）

在当时，用手指计数和用手指演算简单的算题，都被看作受过教育的人的一种才能.人们表现最大天才的地方，就是探求用手指相加和相乘的法则.因此，直到今天，法国中部（奥佛尼地方）的农人，还用一种奇妙的方法来求五以上的数的乘积.假如

要算 9×8，他就将左手屈下四指（4 是 9 减 5 的余数），将右手屈下三指（8－5＝3）．于是，两手屈下的手指之和就是乘积的十位数（4＋3＝7），而不屈的手指之积就是个位数（1×2＝2）．



手指符号

据 1620 年出版的一本小册子

同样性质的方法，在相隔很远的地方，例如比萨拉比亚（Bessarabia）、塞尔维亚（Serbia）、叙利亚（Syria）等地，也曾发现过．它们惊人的相似，并且所有这些地方都有一个时期同是大罗马帝国的一部分，这使人猜想到这些方法起源于罗马．但我们同样有理由可以相信它们是独自演进而来的，因为相似的环境能产生相似的结果．

就是现在，人类中大部分也还是用手指计数：我们不要忘记，在原始民族中，这还是他们日常生活中进行简单计算的唯一方法．

8

我们的数字语言的历史究竟有多久呢？数字产生的确切时代，虽然无从稽考，但是，有确凿的证据表明，它的产生比有文字记载的



历史还要早好几千年.我们上面已经提过一桩事:大概除了五以外,[12]欧洲语言中的数字的本意,已经寻不出一点痕迹来了.这一点更值得注意,因为数字通常是具有极大稳定性的.尽管随着光阴的流转,其他的一切都经历了根本性的变化,我们会发现数字的语汇几乎不受影响.事实上,语言学家就是利用这种稳定性来推估出表面上似乎相隔很远的语族之间的亲缘关系的.读者可以查阅本章末所附的标准印欧语系(印度－欧罗巴语系)中的数字比较表.

那么,数字既有这种稳定性,为什么它的原来意义的痕迹一点都找不到了呢?可信的推测是,数字在产生后,虽然没有什么改变,可是数字所假借的实物本身的名字,却已经几历沧桑,备经变化了.

9

依据语言学家的研究,数字语言的结构,几乎是普遍一致的.无论什么地方,人的十个手指都留下了不可磨灭的印迹.

的确,我们的十个手指毫无疑义地影响了我们数制基底的"选择".一切印度－欧罗巴语、闪族语、蒙古族语和大多数原始民族的语言,其命数法的基底都是十,这也就是说,十以下的数都有独立的名称,十以上就使用某种组合原则,一直到一百.所有这些语言,对于一百和一千,都有独立的字;有些语言还有更大的十进单位.显见的例外也是有的,例如,英文的eleven(十一)和twelve(十二),德文的elf(十一)和zwölf(十二),不过它们都可以追根到ein-lif和zwo-lif;而lif是古德文十.

除了十进制外,的确还有其他两种相当普遍的基底,但它们的特征也相当显著地表明了我们计数方法的拟人化性质.这两[13]种数制便是以五为基底的五进制和以二十为基底的二十进制.

在五进制中,五以下都有独立的数字,以后便开始组合了.(参看本章末附表).显然这是起源于惯用一只手计数的民族.但是人为什么只限于用一只手呢?一个可信的解释是,原始人出

门很少不带武器的.遇着要计数的时候,他就把武器夹在腋下(通常在左腋下),在左手上计数,用右手查点着.这也可以解释,为什么惯用右手的人,通常总是用左手计数.

许多种语言现在仍然带着五进制的痕迹,因而可以相信有些十进制曾经经历过五进制的阶段.有些语言学家宣称,连印-欧语系的数字语言也是起源于五进的.他们指出:希腊字中的pempazein,意思就是五个五个地计数的,罗马数字的五进性质就更明显了.但是,除了这二者之外,我们再也找不到其他证据了,看来,更可能的情况是,我们的种种语系曾经经历过二十进制的初期阶段.

二十进制可能是起源于计数时手指脚趾并用的原始部族.这种数制的最突出的一个例子就是中美洲玛雅印第安人(Maya Indian)所用的方法.古代阿兹台克(Aztec)人的数制也大体相同.阿兹台克人把一天分为二十小时;而军队每师是八千个兵($8000=20\times20\times20$).

纯粹的二十进制是少见的.在许多语言里,十进制和二十进制是混在一起的.在英文里有 score(20), two-score(2×20)和three-score (3×20);在法文里有 vingt(20)和 quatre-vingt(4×20).古代的法文更爱用这个方式;在巴黎有一所医院,本来是为收容三百个瞎眼的老兵而建立的,所以有"十五念"(Quinze-Vingt)的怪名字;而"十一念"(Onze-Vingt)则是专门指那有 220 名警官的警团的名字. [14]

10

在澳洲和非洲的最原始的民族中,还存在着一种记数法,不是以五为基底,不是以十为基底,也不是以二十为基底,而是以二为基底的二进制.这些野蛮人还没有达到屈指计数的程度.他们的独立的数字只有一和二,其复合的数字到六为止.至于六以上,则统称之曰"堆".

前面说到澳洲部族时曾经提到的柯尔宣称:这些民族大多是以双来计数的.这些土人对于这种习惯达到如此根深蒂固的地步,以致我们从一排七根针中抽去两根,他们也很难察觉出来;但如果只抽去一根,他们就马上觉察出来了.他们对类同的感觉比数觉更为强烈.

奇怪的是,这种最原始的基底在近代却得到莱布尼茨(Leibnitz)那样伟大的学者的极大偏爱.在二进命数法中只需要两个符号:0 和 1,用了它们就可以写出一切数,如下表所示:

十进	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
二进	1	10	11	100	101	110	111	1 000	1 001	1 010	1 011	1 100	1 101	1 110	1 111	10 000

以二为底的好处是符号的经济和演算的简单.我们一定记[15]得,每种数制都需要背熟一个加法表和一个乘法表.在二进制中,它们就简化得只剩了 $1+1=10$ 和 $1\times1=1$;而在十进制中,每个表都有一百条.不过这种好处却被书写的麻烦抵销了:十进制的数 4 096($=2^{12}$),在二进制中便要写成 1 000 000 000 000.

就为了二进制那种神秘的雅致,莱布尼茨这样赞叹说:"用一,从无,可生万物."(Omnibus ex nihil ducendis sufficit unum.)拉普拉斯(Laplace)说:

> "莱布尼茨在他的二进制算术中,看出了创造万物的影象.……他想象:一代表上帝,零代表混沌;上帝由混沌中创造出世界万物,正如在他的记数法中用一和零表示一切的数一样.这个观念太使莱布尼茨喜欢了,所以他将它提交任中国数学院院长的耶稣会神父闵明我(Grimaldi)①,希望因

① 闵明我(1639—1712),意大利人,清康熙年间来华,曾在钦天监参与修订历法.他曾告诉莱布尼茨,康熙皇帝耽于算法,并曾研习欧式算法.莱布尼茨认为其二进算术与易经的六爻有关,希望通过闵明我,使康熙"认识基督教信仰的优点".——译者

这种创世纪的象征，而使非常喜欢科学的中国皇帝也转信耶教.我提到这点，目的只在指出，即使是大人物的眼睛，也会被幼稚的偏见所蒙蔽!”

11

设想要是人类没有屈伸自如的手指，而只有两只“不分关节”的秃拳，整个文化史会成个什么样子，这是一个有趣的问题.在这种情形之下，假如最终也发展出某种记数法的话，它很可能是二进式的.

人类采用十进制乃是一种生理上的凑巧.如果相信从一切事物里都可以看出上帝的匠心，就不得不承认上帝是一位蹩脚的数学家.因为十进的基底除了生理上的优点而外，本身没有很多可以称道之处.几乎一切其他的基底，也许除掉九以外，都和它一样高明，也许还强一些.

老实说，如果让一群专家来选择基底的话，我们也许会看到实用家和数学家之间的争论.实用家坚持要用有最多因数的数，如十二之类为基底；而数学家则要用质数，如七或十一之类为基 [16] 底.事实上，18世纪后期的大博物学家布封(Buffon)曾经提议举世公用十二进制.他指出：十二有四个除数，而十只有两个，他坚持说，正是由于我们的十进制，世世代代以来，都感到极为不便，所以虽然十是举世公用的基底，而在大多数的度量衡中，都有着以十二为基底的辅助单位.

另一方面，大数学家拉格朗日(Lagrange)宣称：用质数作基底有绝大好处.他指出：用了质数基底，每个整分数就都不能化简，因此表示该数的方法只有一种.在我们现在的命数法中，譬如小数0.36，实在代表着许多个分数：$\frac{36}{100}, \frac{18}{50}, \frac{9}{25}, \cdots$.若用十一等质数作基底，这种暧昧不明之处就大大减少了.

不管我们委托选择基底的贤人们决定采用质数还是合数作

基底,我们敢肯定,十甚至是根本不会被考虑的,因为它既非质数,又不含足够多的因数.

在我们这个时代,计算的工具已经大大代替了心算,所以上述两种建议都不会有人去认真考虑.因为所得到的益处甚微,而人们用十来计数的传统已经根深蒂固,谁要想去改变它,看来是很滑稽的了①.

[17] 从文化史的观点来看,改变数制的基底,即使可行,也是极不受欢迎的.只要人类一直用十来计数,他的十个手指就一直会使他意识到,他的精神生活的这一最重要方面,也起源于人类自身.因此,就让十进制作为下述名言的见证而永存下去吧:

人是万物的尺度②.

[18] **印-欧语言中所示数字的极端稳定性**

	梵文	古代希腊文	拉丁文	德文	英文	法文	俄文
1	eka	en	unus	eins	one	un	odyn
2	dva	duo	duo	zwei	two	deux	dva
3	tri	tri	tres	drei	three	trois	tri
4	catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	chetyre
5	panca	pente	quinque	fünf	five	cinq	piat
6	sas	hex	sex	sechs	six	six	shest
7	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sem
8	asta	octo	octo	acht	eight	huit	vosem
9	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	deviat
10	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	desiat
100	cata	ecaton	centum	hundert	hundred	cent	sto
1 000	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	tysiaca

① 参看附录3:论命数法的基底.

② 此语出自希腊诡辩学派的首倡者普罗塔哥拉(Protagoras).——译者

典型的五进制：

新赫布里底群岛的阿皮(Api)族语言

	字	意　义
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	手
6	otai	另一个
7	olua	另二个
8	otolu	另三个
9	ovair	另四个
10	lua luna	两只手

典型的二十进制：

中美洲玛雅族语言

1	hun	1
20	kal	20
20^2	bak	400
20^3	pic	8 000
20^4	calab	160 000
20^5	kinchel	3 200 000
20^6	alce	64 000 000

典型的二进制：托列斯海峡(Torres Straits)西部某部族

1　urapun	3　okosa-urapun	5　okosa-okosa-urapun
2　okosa	4　okosa-okosa	6　okosa-okosa-okosa

[19]

第2章 空 位

"用十个记号来表示一切的数,每个记号不但有绝对的值,而且有位置的值,这种巧妙的方法出自印度.这是一个深远而又重要的思想,它今天看来如此简单,以致我们忽视了它的真正伟绩.但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便,才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位;而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德(Archimedes)和阿波罗尼(Apollonius)的天才思想的关注时,我们更感到这成就的伟大了."

——拉普拉斯

1

我写到这几行的时候,一首古老的歌在我的耳边响起来了:

"Reading, 'Riting, 'Rithmetic,

Taught to the tune of a hickory-stick!

(读呀,写呀,算呀,

敲着戒方往下教呀!)"

在这一章里,我要讲的就是这三个R中的一个的故事,虽然它在三个R中是最老的一个,但是对人们说来,却还是最难的一个.

这故事讲的不是灿烂的成就,不是英勇的事业,也不是壮烈

的牺牲.它是盲目的摸索和侥幸的发现,在黑暗中乱碰,而又拒绝接受光明.这个故事充满蒙昧和偏见,健全的判断常因效忠于传统而被掩没,理性长期屈服于习俗.总之,这是一个人世间的故事.

2

[21]

成文的命数法,也许和私有财产一样地古老.它的起源,毫无疑问是因为人们想记录他的羊群和其他物品.在树上、木片上的割痕,岩石上画的纹路,粘土上的图记——这些都是想用书写的记号来记录数字的最早的形式.考古学家的研究查实了在太古时代就有这种记录.它们在欧洲、非洲和亚洲的史前民族的洞穴中,都有发现.至少,命数法和文字一样地古老,有证据表明它可能还在文字之先.甚至也许就是由于数字的记录才使人联想起声音的记录呢.

表明书写数字的系统应用的最古记载,要算古苏美尔人(Sumerian)和埃及人(Egyptian)所作的了.追溯它们的起源,大约产生于同一个时期,都在公元前三千五百年左右.经过研究,我们会为它们应用了非常相似的原则而感到惊异.当然,这些民族虽然相距很远,但不能说他们没有交往的可能.不过,更可能的是,他们都循着阻力最小的方向发展他们的命数法,就是说,他们的命数法只是记账的自发过程的产物罢了(见下图).

	1	2	3	4	5	9	10	12	23	60	100	1000	10000
苏美尔文 3400B.C.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
埃及象形文字 3400B.C.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
希腊文	α'	β'	γ'	δ'	ε'	θ'	ι'	ιβ'	κγ'	ξ'	ρ'	,α	,ι

古代命数法

实在说，不论在古巴比伦(Babylonia)人的楔形数字中，或是埃及芦草纸上的象形文字，还是古代中国文献上的古怪图样，我们都发现了明显的基数原则．九以下的每一个数字，都只是一组笔画．九以上又依照相同的原则，更高的单位，如十、百等，则各自以特别的记号表示．

[23]

3

英国的账板(tally-stick)①，虽然来源不明，但其谱系也许非常古老，它也具有这种明确无疑的基数性质．账板的图解如下图所示．每一小齿纹代表一镑，大的则代表十镑、百镑等．



英国账板示意图

令人奇怪的是，在现代命数法引进之后，这种变得陈旧可笑的英国计账法仍顽强地保持了若干世纪．事实上，英国议会史上的一段重要插曲便是由账板引起的．在这段插曲发生几年之后，狄更斯在一篇关于“行政改革”的演说中，绝妙地讽刺道：

> “若干世代之前，在木片上刻齿来记账的原始方法居然传进了财政部，其账目的记法就像鲁滨孙(Robinson Crusoe)在荒岛上记日历的方法．千千万万的簿记员、会计师和审记官们前后相承，因循旧习，而官厅公事仍旧看重这种锯齿木片，仿佛它们就是宪法的支柱一般，财政部的账目照旧记在那些名为账板的榆木片上．到了乔治第三(George Ⅲ)治世的时候，一些具有革新精神的人提出了质问：既然纸

① 我国《朱子语类》的记载可以作为参证：“结绳者，溪峒名‘蛮’，犹各有之．又有刻板者，凡年月日时以及人马粮草之属，皆刻板为记，都不相乱．”——译者

张、笔墨、石板、石笔等已经发明了,这种陈旧惯例究竟应当顽固地保存下去,还是应该有所改变?这种大胆独创的直率意见提出后,全国各级繁琐的程序衙门反而更加有增无减,直到1826年,才算把木片记账法废止.到了1834年,发觉账板存积的数量已经着实可观了;于是又发生了一个问题:对于这些虫蚀鼠伤、残破霉烂的枯朽木片,究应如何处置?这些木片当时库存在威斯敏斯特(Westminster),凡是稍明事理的人都知道,最简单的办法莫过于将它们搬出来,[24]分给附近的贫苦居民作柴火.然而,它们从未被加以利用,官厅规定不容许去利用它们,结果是指令将其秘密焚毁.此案在上院的火炉中执行了.炉子给这些愚蠢的木片塞得太满,火烧着了壁板;壁板又祸延到下院;结果两院全部灰飞烟灭,然后再鸠工重建,于是我们老百姓现在又要负担一百万镑的建筑费用了."

4

和这种最早记录下来的纯基数性质相反,还有一种序数命数法,即用文字中的字母,按其读法的次第来表示数字.

这种原则的最早例证是腓尼基(Phoenicia)的命数法.它大概是因为商业繁盛、需要简约的记数方法而出现的.希伯来(Hebrew)和希腊(Greek)二者的命数法毫无疑义是从腓尼基来的:他们把腓尼基的数制连同字母照单全收,甚至连字母的读音也保留着.

另一方面,今天还在使用的罗马命数法显然是古代基数方法的回归.不过它也受了希腊的影响,它的某些单位就是采用字母记号,诸如X为十,C为百,M为千等.但是,光是用字母来代替迦尔底亚(Chaldea)人或埃及人的象形符号,都还不足以构成原则上的改变①.

① 参看附录4:阿基米德记录大数的方法.

5

古代命数法的演变,最后表现为希腊的序数制和罗马的基

[25] 数制.二者之中哪一个较好呢?如果命数法的唯一目的在于寻求简明的记量,这问题才有意义.然而主要的问题不在于此.远比这个重要的是:这种数制是否适用于算术运算以及它能对计算提供什么方便?

在这方面,对这两种方法很难有所取舍:二者都不能创造出一种普通人所能应用的算术来.这就可以说明,有史以来,直到现代的位置命数法出现以前,计算术为什么很少进步.

并非没有人努力研求这种数字的运算法则.只要看一看现时一般人对一切计算都感到的极大敬畏,就可以晓得这些法则是何等的困难了.精于此道的人常被认为有着天赋异禀.这就可以解释为什么从远古以来算术一向是僧侣们所勤奋研究的东西了.以下我们还有机会把早期数学与宗教仪式和宗教神秘的这等关系作较为详尽的叙述.这不仅仅在科学依附于宗教的古代东方是如此,即使开明的希腊人,也不能完全的逃避数与形的这种神秘性.

而且,在某种程度上,这种敬畏还延续到了今日.普通人都认为数学的特长与计算的敏捷是一回事."你原来是一位数学家吗?啊,那么你对于所得税的申报是不会感到麻烦的了!"哪一位数学家平生没有被人家这样问过呢?这两句话或许含着无意的讽刺,难道大多数职业数学家在收入问题上不是也常常发生许多麻烦吗?

[26]

6

有一个关于15世纪一位德国商人的故事,虽然我不能证明确有其事,可是它把当时的情形表现得太真切了,不容我不讲述一下.话说这位商人有一个儿子,他想使儿子学些高深的商业教

育.于是他去求教一位大学里的名教授,该把儿子送到哪儿去念书.教授回答说:如果这位青年的数学课程将只限于加和减,他可以进国内的大学学习这些功课;至于乘和除的学问,他说,还是意大利最先进,他认为,只有到那里去才能得到那种高等的教育.

实际上,当时施行的乘法和除法与现代所指的乘法和除法,简直很少有相同之处.譬如说,乘法当时是指次第采用双倍法,这是把一个数两倍起来的叫法.同样,除法也可归为折中法,就是把一个数“对半分”.中世纪算法的实际情形可以从下面的例子中看出来.它写成现代的符号是:

现　在	13 世纪
46	$46\times2=92$
13	$46\times4=92\times2=184$
138	
46	$46\times8=184\times2=368$
598	$368+184+46=598$

我们现在可以理解,为什么人类如此执着地使用算盘以至于账板这类东西了.现在一个三尺童子就能进行的计算,在那时得用上一位专家;今天只消几分钟的事情,在12世纪意味着几天的埋头苦干. [27]

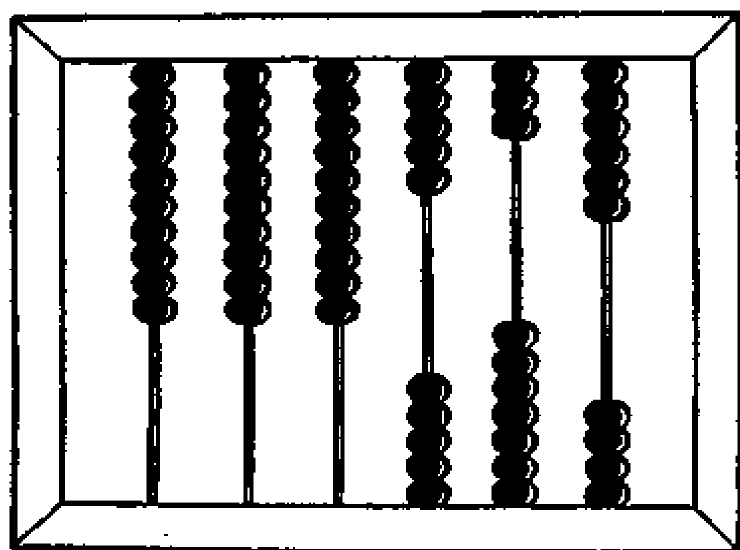
现代一般人驾驭数字,大为灵便,这常常引来作为人类智力增长的证据.问题的真相是:当时遭到的困难,实在来自所用的命数法,因为这种命数法不易采纳简单清晰的法则.现代位置命数法的发明,根除了这些障碍,使算术成为下愚也能学会的东西了.

7

生活、工商业务、地产和奴隶占有、赋税、军事组织等等日趋

复杂——一切都需要或多或少复杂的计算，它们超出了屈指技术的范围.死板而又不实用的命数法，实在不足以应付这种种需要.那末，人类在现代命数法出现之前的五千年文明生活中，是怎样应付这些困难的呢？

答案是：人们一开始就需依靠机械方法，这些方法虽然因时因地而形式各有不同，但原理却都是一样.马达加斯加(Madagascar)的奇妙的点兵法可以作为典型.士兵列队通过一条窄的过道，每一士兵经过即投下一个石卵.石卵满了十个，就在表示十的另一堆上投一个，这样继续计数下去.第二堆的石卵积满十个，再投一个于表示百的第三堆上，如此一直到全体士兵计算完了为止①.



计算板示意图

[28] 这个方法离计数盘或算盘就只差一步了；几乎在所有有计数技术存在的国家，都可以找到这样或那样形式的计数盘或算盘.算盘的普通形式是一个平直的盘，中间分成一系列平行的列，每列代表一个不同的十进位的级，诸如个、十、百等.盘中还设有一组算子，用以表示每类中单位的个数.例如，要将 574 用

① 参看附录 5：克谢尔克谢斯点兵法.

算盘表示,则在最末一行,拨下四子;末行前面一行,拨下七子;更前一行,拨下五子.(见左图)

已知的许多计数盘,其差别仅在于所用的列的构造和算子的形式不同.希腊式和罗马式的算子都不连在盘上,而中国今天的算盘(Suan-Pan),算子是穿孔的圆珠,在细长的竹杆上滑动.俄国的计数盘和中国的相像,叫作"四则题"(Szczety),也有一个木框,框上有一排金属杆,杆上穿着滑动的圆扣作为算子.最后,古印度的沙盘,很可能在原则上也属于一种算盘,它是用写在沙上的可以涂掉的记号作为算子.

abacus(算盘)这个字的由来还不能确定.有人考证它出自闪族语的abac(沙);又有人相信它来自希腊文abax(石板).这种工具在古希腊已广泛使用,我们在希罗多德(Herodotus)和波利比阿(Polybius)的著述里都可查到.后者在他的《通史》(Historia)里评论马其顿(Macedonia)的斐利普第二(Philip Ⅱ)的宫廷时,曾作下面的讽喻:

> "正如算盘里的算子,随着计算者的高兴,一时价值万金,一时只值一文.朝中诸臣因国王的喜怒,一时荣遇方隆,一时贱如草芥."

直到今日,在俄国的农村和整个中国,算盘还是常用的东西,算盘和现代计算器还在那些地方继续竞争.但是在西欧和美国,算盘已经成了古董,大多数的人只能在图画中见到它.很少有人知道,在他的本国里,只在几百年之前,算盘还是那样地流行,只有使用它才能克服笨拙的命数法所不能胜任的许多困难. [29]

8

人们如果回想一下位置原则发明以前的计算史,就会对当时成就之少感到惊异.在这大约五千年的漫长时期中,多少文化兴衰相继,各自留下了一批文学、艺术、哲学和宗教的遗产.但是在人类最早就开始实践的计算技艺这个领域里,到底有多少真正的

成就呢？那种死板的命数法太原始了，使得进步几乎是不可能的，计算工具的范围如此之狭窄，以致初等计算也非专家莫办．不仅如此，人类将这些方法用了几千年，既没有在工具上作出一点儿值得称道的改进，也没有在数制上提出任何重要的观念来．

这个批评也许看来过分严厉了；毕竟，用我们这个突飞猛进的时代的标准来权衡远古的成就是不公平的．可是，即使是和中世纪黑暗时代的迟滞的思想发展相比较，计算的历史也呈现一幅罕见的荒凉停滞的图画．

[30] 从这种观点看来，印度无名氏在公元初期的几个世纪所发明的位置原则实在是一件有世界意义的大事．这个原则不但是方法上的根本变革；而且，现在我们知道，若是没有它，算术上的任何进步都是不可能的．可是，这原则却是这样的简单，今天最笨的学生也不难领会．在某种程度上，我们数字语言的结构本身就暗示了这个原则．的确，当人们最初想把计数盘的动作译成数字语言的时候，很自然会发现这种位置原则的．

最使我们感到困惑的是，连古希腊的伟大数学家也没能偶然发现它．难道是希腊人太藐视应用科学，甚至于把教育子弟的大事也让奴隶去做吗？要是真个如此，为什么这个给我们建立了几何学并且把这门科学推进得如此深远的民族，连一种初等的代数也创造不出来呢？代数学这个近代数学的擎天柱石也起源于印度，并且几乎和位置命数法同时出现，这事不是同样地值得奇怪吗？

9

仔细剖析一下我们现代的命数法或许有助于这个问题的解决．位置原则的涵意是，一个数字的值不但依赖于它所表示的自然序列中的那个元素，同时也依赖于它在数组中相对其它符号所处的位置，同一个 2，在 342，725，269 三数中，意义是各不相同的：在第一个数中，它代表二；在第二个数中，代表二十；在第

三个数中，代表二百．事实上，342 不过是三百加四十加二的缩写．



然而这正是计数盘的办法，计数盘上的 342 就是用右图表示的．前面已经说过，只要将这个办法译成数字语言，看来就足以得出我们今日所用的命数法了． [31]

不错！可是还有一个困难．当我们想把计数盘的演算永久记录下来时，会遇到这样的障碍：≡ ＝这样一个记号，可以代表下列任何一个数字：32，302，320，3 002 等等．要避免这种含糊之处，必须找出某种办法，把其中的空隙表示出来，也就是说，我们需要一个表示空位的记号．

因而我们可以看出，在没有发明一个表示空级的符号，表示无的符号，也即我们现代的零以前，任何进步都是不可能的．古希腊人的思想是具体的，他们领会不到虚无也是一个数，更不会用一个记号来代表虚无．

即使是印度的那位无名氏也没有把零看作是无的符号．印度的零字——sunya 的意义是空或空白，但没有"虚"或"无"的意思．所以，就各方面看来，零是在想把计数盘的演算作永久记录时，为了避免含糊而偶然产生的东西．

10

印度的 sunya 如何变成今日的零，实在是文化史中最有趣的一章．当 10 世纪的阿拉伯人采用印度的命数法时，他们把印度的 sunya 译成他们自己的 sifr，这个阿拉伯字的意义是"空"．到印度—阿拉伯命数法最初传入意大利的时候，sifr 就拉丁化而成了 zephirum．这是 13 世纪初叶的事；在这以后的一百年间，它又经历了一系列变化，最后成为意大利字 zero． [32]

差不多就在这时候，约旦纳斯·内模雷利奥斯（Jordanus Nemerarius）将阿拉伯数制传入德国．他保留了阿拉伯原字，但略作

变形，成为 cifra. 在其后的一段时间内，欧洲的学术界还沿用 cifra 这个字及其变体来表示零的意义；这一点可以从 19 世纪最后一位用拉丁文写作的数学家，伟大的高斯(Gauss)仍应用 cifra 表示零的意义看出来. 在英文里，cifra 变成了 cipher，还保存着零的原义.

当时一般人对于这种新命数法的态度由下述事实可见一斑：当它刚刚传入欧洲时，人们把 cifra 这个字当作表示秘密的符号，不过，这种含义在后来几百年中完全失去了. 英文动词 decipher(解密)就是保持这个早期遗物的碑铭.

这种计数法的第二个阶段，新的计算法得到更为广泛的传播，重要的是，大家已经注意到零在新数制中所占的重要地位. 的确，他们把整个数制和它的主角 cifra 等同起来了，这就解释了，为什么这个字的不同形式 ziffer, chiffre，等等，在今日欧洲具有数字的意义.

普通人用 cifra 指数字，知识界用 cifra 指零，这个字的双重意义引起了相当大的混乱. 学者们希望恢复这字的原义，可是没 [33] 有效果：因为普通人所用的意义已经根深蒂固了. 知识界只好向大众让步，用意大利文的 zero 来表示今天所用的那个意义，问题才算最终得到了解决.

algorithm(算法)这个字也同样的有趣. 这个字现在的意义是指这样的一种数学程序：它所包含的步骤，数目是不确定的，而其每一步骤都要应用前一步骤的结果. 可是在第 10 到第 15 世纪，algorithm 和位置命数法是同义的. 我们现在知道，这个字不过是阿勒·花剌子米(Al Kworesmi)的讹用，这是 9 世纪一位阿拉伯数学家的名字，他所著的书(拉丁文译本)是传到欧洲的有关这个论题的第一部著作.

11

在今日，位置命数法已经成为我们日常生活的一部分了，

这方法是优越的,记号紧凑,计算容易而精确,看起来它必定会马上受到普遍的欢迎.事实上,这个过渡时期一点儿也不短,拖延了好几个世纪.墨守陈规的珠算家和主张改革的笔算家之间的斗争,从11世纪持续到15世纪,经历了通常难以避免的蒙昧的和反复的阶段.有些地方,阿拉伯数字不许用在公文上;又有些地方,这种方法完全被禁止了.只是照例,禁止不但不能根除反而促进了它的流传罢了,这从13世纪意大利的文献中可找出很多证据,看来,当时的商人把阿拉伯数字用来作为一种密码.

不过,在一个短时期内,反动确能阻止新数制的进步和发展.的确,在这些过渡的世纪中,计算法上并没有什么举足轻 [34] 重的改进.只是数字的外形发生了一系列的改变;这倒并不是意在改进,而是因为当时的课本都是手抄的.实际上,非到印刷术采用之后,数字是不能定形的.顺便说一句,印刷术对数字的固定影响如此之大,以至今天的数字,大体还和15世纪的外观相同.

12

至于笔算家什么时候得到最后的胜利,确切的日期已经找不到了.我们只知道在16世纪初叶,新命数法的优越性已经无可争议了.此后进步便毫无阻力,在随后一百年的时间里,一切关于整数及分数和小数的演算法则,其范围和形式实际上都和我们今天学校里所教的没有什么两样了①.

再过一个世纪,珠算家及其所代表的高论,都完全为人们所忘记,以至欧洲各民族开始把位置命数法当作他们自己的国粹了.例如,19世纪初在德国,阿拉伯数字被称为Deutsche(德国的),以别于被认为是洋货的罗马数字.

---

① 参看附录6:小数的历史.

算盘本身，在西欧18世纪已经绝迹．它在十分奇妙的情况[35]下，于19世纪初叶又重新出现，数学家彭色列（Poncelet）是拿破仑手下的一位将军，他在攻俄之役变成了俘虏，并且在俄国被拘留了许多年．他回到法国的时候，带回的各种稀罕物件中，就有一个俄国算盘．以后许多年，彭色列带回的这件进口货被认为是"野蛮人"的稀罕玩意儿．这种民族性的健忘症在文化史中原是屡见不鲜的．即使在今天的受过教育的人中，有几个人知道，仅在四百年前，屈指计数还是普通人唯一的计算手段，而计数盘则只有当时的计算专家才会使用呢？

13

十之八九是作为代表计数盘上的空行而产生的记号——印度字 sunya，看来注定要成为文化进展的转换点．没有它，今天的科学、工业和商业的发展都是不可想象的．这个伟大的发现影响所及绝不限于算术．通过为推广数的概念铺平了道路，它在数学的几乎每一个分支都起着同样重要的作用．在文化史上，零的发现永远标志着人类最伟大的独一无二的成就．

一个伟大的发现！不错．但它正和许多对人类生活有着深远影响的早期发现一样——不是刻苦研究的报酬，而是盲目撞到的礼物．

第3章 数 话

[36]

"本质上说，凡美的、确定的、作为知识之对象的，必先于不确定的、不可知的与丑的."

——尼寇马克(Nicomachus)

1

数学中没有任何其他两个分支比算术和数论更为截然相反的了.

算术以其法则的极大普遍性和简单性，使得最笨的人也能领悟.实际上，计算的敏捷不过凭着记忆力，而神速的计算家也不过是一架肉体的机器，其优于机器的好处之一，不过是行动方便罢了.

另一方面，数论却是数学中所有部门里面最最难的一门.不错，它的问题陈述出来，实在简单得连三尺孩童也能明白所讨论的是什么.但是，它所使用的方法却是那样的独特，必须有非凡的机巧和极大的敏才，才能找到恰当的入门之处.这里是直觉大显身手之地.现已了解的各种性质，大半是依靠一种所谓归纳法的办法而发现的.有些陈述，多少世纪来都认为是正确的，后来却证明是错了；还有好些问题，至今仍在向许多最伟大的数学家的能力挑战，而没有得到解决.

算术是一切数学的基础，不论纯粹数学还是应用数学.它是 [37] 一切科学中最有用的；而且也许在人类的知识中，没有哪一门在

人群中有更广泛的传播了.

另一方面,数论是数学中应用最少的一个分支.不但至今对技术的进展没有什么影响,即使在纯粹数学的领域中,也经常处于孤立地位,和整个科学体系只有泛泛的联系.

习惯于用实用观点来解释文化史的人,会断定算术早于数论.然而恰恰相反,整数论是数学中最古老的分支之一;而现代的算术,其历史还不到四百年.

这在文字史中也得到反映.希腊文的 arithmos 是数的意思,而 arithmetica 这个字,甚至迟至 17 世纪,还是指数论而言.我们今天所谓的 arithmetic(算术),实在是希腊人称作 logistica 的,它在中世纪时,则称为 algorism,这在上面已经说过了.

2

我行将谈到的奇妙的故事,虽然对于其他的一些数学概念的发展很少直接关系,但是为了说明这些概念的进化过程,却似乎没有其他更好的方法了.

自古以来,人类研究的对象只是整数的个别的特性,至于它的更加内在的本性,则看作是理所当然的事情,不予追究.我们怎样去解释这种怪现象呢?

人类的生活,借用孟德斯鸠(Montesquieu)的一句名言来说,[38] 不过是一系列徒然的希望和没有根据的恐惧.这种希望和恐惧,今天表现为虚无飘渺的宗教神秘,在古代则表现为更具体和明显的形式.星辰、石头、走兽、草木、文字和数字,都成为人类命运的先兆和代表.

一切科学的起源都可以溯源于对这种神秘影响的思索.星相学先于天文学,化学产生于炼金术,数论的前身是一种神数术,直到今天,在其他莫明其妙的旁门左道和预兆中,它依然存在着.

3

"七个祭司拿着七个羊角绕耶利哥(Jericho)城七天,到第七日他们绕城七圈."①

造成洪水泛滥的暴雨一连下了四十个白天和四十个夜晚.摩西(Moses)在西奈(Sinai)山上和耶和华(Jehovah)商谈了四十天又四十夜.以色列(Israel)的子孙在荒野中漂泊了四十个年头.

6,7和40是希伯来人的预兆数字,基督教的神学把七承继了下来,例如:七种死罪、七德、上帝的七灵、圣母玛利亚(Virgin Mary)的七乐、从玛达林(Magdalen)身上赶出的七个魔鬼.

巴比伦人和波斯人偏爱60和它的倍数.克谢尔克谢斯(Xerxes)②把海列斯彭特(Hellespont)痛鞭三百③,大流士(Darius)则因为他的一匹神马淹死在河里,下令把金德斯(Gyndes)河挖成三百六十道壕沟.

据彭加勒(Poincaré)说,宗教性的数,随地区的不同而不同.虽则3,7,10,13,40和60特别受宠,可是几乎其他每一个数在某一地方和某一时期也都曾被赋以神秘的意义.例如巴比伦人把他们的每一个神各配以一个60以下的数,这个数表明这位神

---

① 典出《旧约·约书亚纪》所载约书亚攻陷耶利哥城的故事.——译者

② 此名有薛西斯、泽尔士等不同译法,此处采用王嘉隽译希罗多德《历史(希腊波斯战争史)》一书(1962年商务版)的译名.——译者

③ 这件事颇像中国《史记》上所载秦始皇的故事.秦始皇"逢大风,几不得渡",就"大怒,使刑徒三千人皆伐湘山树,赭其山."在这里,这位波斯大王克谢尔克谢斯要入侵希腊,要在达达尼尔海峡(海列斯彭特是达达尼尔海峡的古名)架桥,渡过他的大军.桥刚架好,立刻被风涛摧毁.这位大王大怒,下令把海痛鞭一顿,还派烙印师去把海加上烙印,把一副脚镣投入海里.——译者

灵在灵霄殿里的品位.

[39] 与巴比伦人显著相似的是毕达哥拉斯(Pythagoras)学派对数的崇拜.他们似乎害怕由于忽视了某个数而冒犯了它,因而对50以下的数大半都给与一个神圣的意义.

4

神数术中最荒诞不经但又普遍流行的是所谓字数术(Gematria).希伯来文和希腊文的每个字母都有双重意义:一是音,一是数.一字中各字母的数的总和就是这个字的数.从字数术的观点来看,如果两个字的数加起来是相等的,它们就是等价的.从古以来,不但在注释圣经的章节时,就使用了字数术,并且还有迹象表明,圣经作者本人也曾实践过这种艺术.例如亚伯拉罕(Abraham)赶去援救他的兄弟以利沙(Eliasar)的时候,带了318名奴隶.希伯来文的以利沙加起来正等于318,这难道只是偶合吗?

在各种希腊文集里,可以找到许多字数术的例子.三位英雄的名字:帕特洛克罗斯(Patroclus),赫克托(Hector)和阿基里斯(Achilles),各自加起来的数字是87,1 225和1 276.由于这一点,阿基里斯就当然独占鳌头了①.有位诗人,为了要窘辱他的情敌塔马戈拉斯(Thamagoras),特地证明这个名字和loimos——一种可怕的瘟疫相等价.

基督教的神学特别利用字数术来解释过去及预测未来.具有特别意义的是666,这是启示录中的兽的数.天主教的解释是,这兽就是反基督.一位与路德(Luther)同时的天主教神学家彼得·邦葛斯(Peter Bungus),写了一本近七百页的神数术的书.

① 三人均为希腊史诗《伊利亚特》中的英雄.帕特洛克罗斯与特洛伊主将赫克托交战,被赫克托所杀.阿基里斯怒而上阵,杀赫克托以报仇.三人的战斗,为史诗高潮之一.——译者

这本著作的大部分都是论述神秘的666，他发现这和路德的名字等价；据此，他把这看作是路德是反基督[①]的确凿证据．路德 [40] 作了回答，他把666解释为对教皇统治的年限的预告，他庆幸这个期限已经快到尽头了．

今天的虔诚的希伯来学者还把字数术作为课程的一部分．这些学者对于圣经用词的双重意义如此熟练，这可以由下面的似乎不可能的特技看出．希伯来的法典家（Talmudist）可以说出一连串彼此毫不相关的数字，有时达到五百或更多些．他连续说十分钟之久，同时与他谈话的人把这些数字都记录下来．然后他重说一遍，结果数字和次序毫无差错．他已经记住了这一大串数字吗？不是的，他不过是把希伯来文圣经的某些章节用字数术译出来罢了．

5

我们再回过来说数字崇拜．它在毕达哥拉斯学派的哲学中得到最高的表现．他们认为偶数是可分解的，从而也是容易消失的、阴性的、属于地上的；而奇数则是不可分解的、阳性的、属于天上的．

每一个数目都与人的某种性质相合．一表示理性，因为理性是不变的；二表示意见；四表示公平，因为它是第一个平方数，是两个相等数的乘积；五表示婚姻，因为它是第一个阴性数和第一个阳性数的结合．（一不作奇数论，而是一切数的源．）

奇怪得很，我们在中国的神话里，找到与这十分一致的情形．中国的奇数象征：白、昼、热、日、火；偶数反过来，象征黑、夜、冷、物、水、地．用数字排成一个圣图，叫作《洛书》，如果用适当的 [41] 方法使用它就会有神奇的性质．

① 在那个时代的欧洲，“反基督”是一个令人毛发悚然的罪名，就像中国封建时代诬人为“非圣犯上”一样．——译者

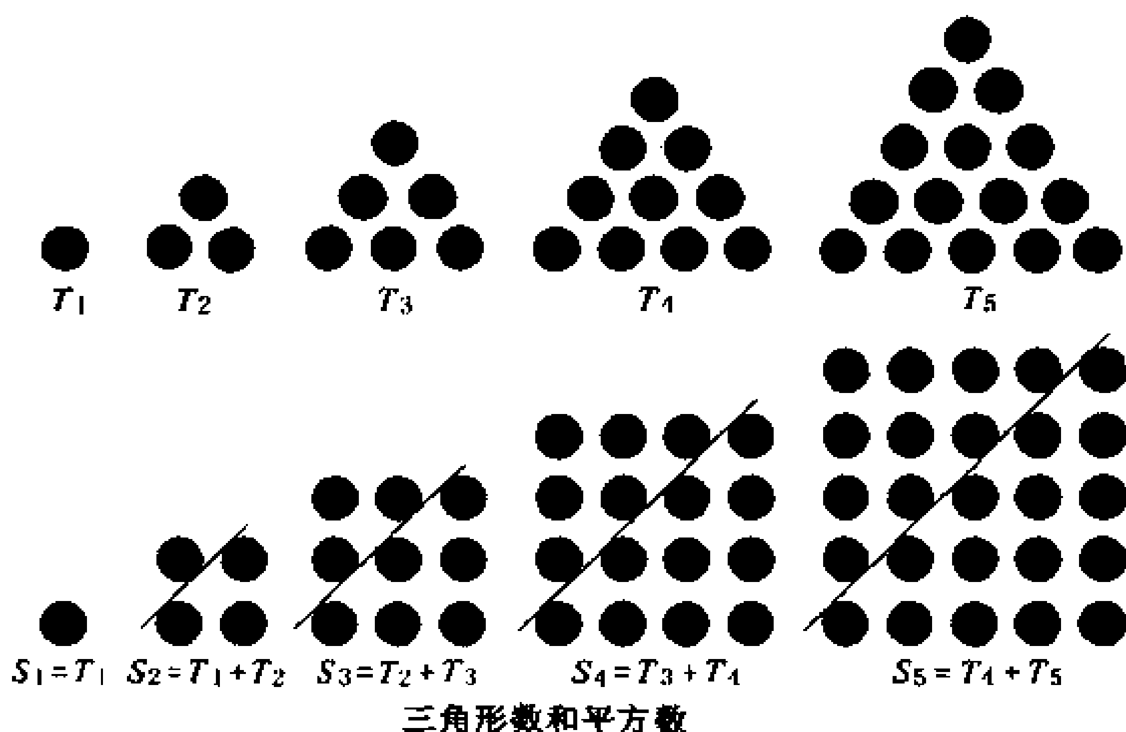
6

“创造诸神和人类的神圣的数啊！愿您赐福我们！啊！圣洁的、圣洁的四(tetraktys)啊！您孕育着永流不息的创造源泉！因为您起源于纯洁而深奥的一，渐次达到圣洁的四；然后生出圣洁的十，它为天下之母，无所不包，无所不属，首出命世，永不偏倚，永不倦息，成为万物之锁钥.”

这就是毕达哥拉斯学派对于 tetraktys 的祷文. tetraktys 就是圣四，它被认为代表四种元素：火、水、气、土. 圣十就是由前四个数 1,2,3,4 结合而产生出来的. 有一个有趣的故事说，毕达哥拉斯命令一个新门徒计数直到四，他说：

“看吧，你以为是四的，实际乃是十，是一个完全三角形，是我们的口令.”

提到完全三角形是很重要的：它看来表明在早期的希腊时代，数是用圆点来记录的. 附图示有三角形数1,3,6,10,15和平



三角形数和平方数

方数 1,4,9,16,25 等.这正是数论的实际开端,这种对几何直觉的依赖是很有趣的.毕达哥拉斯派知道:任一级平方数等于其同级的三角形数和它的前一级的三角形数之和.他们的证法是把各点划分为两组,再如次图所示,把它们加以计数.把这个方法和现在聪明的中学生所用的方法比较,甚为有趣.第 n 级的三角形数显然为 $1+2+3+\cdots+n$,它是一个算术级数之和,其值等于$\frac{n(n+1)}{2}$.同理,它前一级的三角形数是$\frac{(n-1)n}{2}$.简单的 [43] 代数即可证明这两数之和等于第 n 级平方数,即 n^2.(见 34 页图)

到了现在,除了*平方*和*立方*两个名词外,这种早期的几何起源再没有剩下什么了.三角形数和更一般的多边形数都没有什么科学上的意义.然而直到尼寇马克(公元 100 年)的时代,它们还是算术研究的主要对象呢①.

7

毕达哥拉斯派这种神秘哲学,虽则对于希腊所有思想家包括柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristotle)的沉思都留下了极深刻的印象,可是它的来源却还是一个争辩未决的问题.现代人为理性主义所浸润,很可能把这种虚夸的数字崇拜看作一种*系统化了的迷信*.可是如果我们以历史的透视眼光来看,我们就会采取一种比较宽宏的态度了.剥去其宗教神秘主义,毕达哥拉斯派哲学包含的基本观念是,唯有通过数和形,才能把握宇宙的本性.毕达哥拉斯的高座弟子菲洛拉乌(Philolaus)和另一位可以列入新毕达哥拉斯学派的尼寇马克都表达了这种思想.

"一切可能知道的事物,都具有数;因为没有数而想想

① 参看附录 7:几何中的神秘.

象或了解任何事物是不可能的."(菲洛拉乌)

"自然依据精巧的蓝图所安排的万物,不论是单独的还是整体的,都像是被按照数来创造一切的先知和理性所挑选出来并排列成序的,它们只能由心灵来领会,因而是完全无形的;但是是真实的;的确,是真正真实的,永恒的."(尼寇马克)

[44]

8

当有人问毕达哥拉斯,"朋友是什么?"他回答说:"这是第二个我,正如 220 与 284."用现代术语来说,其意是:284 的除数是 1,2,4,71 和 142,加起来得 220;而 220 的除数是 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55 和 110,它们加起来也得 284.毕达哥拉斯派称这种数为*友数*.

寻找这种一对对的数,希腊人认为是一种极有趣味而又相当繁难的问题.这种数是否有无限对?这个一般性的问题,至今尚未能解决,虽则已经找出差不多一百对了.

印度人甚至在毕达哥拉斯之前就已经知道友数了.由圣经的若干章节看来,好像希伯来人也把这种数认作是一种吉兆.

有一个未经证实的中世纪的故事说:有一位天子的名字在字数术上与 284 等价.他因此要寻求一位名字代表 220 的新娘,他相信这才是上天保证的美满姻缘.

9

接着还有所谓"完数".先看像 14 这样的数:将它的除数 1,2 和 7 相加;得到 10.因此 14 比它自己的除数之和大,由于这个原因,它叫作*盈数*.另一方面,12 的除数之和是 16,比 12 大,由于这个原因,12 叫作*亏数*.完数则既不盈余,也不亏欠,它恰恰等于它自己的除数之和.

最小的完数是 6 和 28，印度人和希伯来人早就知道它们了. 有些圣经注释家认为 6 和 28 是上帝创造世界时所用的基本数字. 他们指出，创造世界花了六天，二十八天则是月亮绕地一周的日数. 有人更进而解释洪水之后第二次创造世界之所以不完美，乃因为在诺亚(Noah)方舟上得救的是八个人，而不是六个人. [45]

圣·奥古斯丁(St. Augustine)说：

> "6 这个数本身就是完全的，并不因为上帝造物用了六天；事实恰恰相反，因为这个数是一个完数，所以上帝在六天之内把一切事物都造好了. 即使没有六天创造世界这种事，6 仍旧不失其为完数."

接下去的两个完数看来是尼寇马克发现的. 我们引其《数论》(Arithmetica)中的一段如下：

> "也许是这样：正如美的、卓绝的东西是罕有的，是容易计数的，而丑的、坏的东西却滋蔓不已；是以盈数和亏数非常之多，杂乱无章，它们的发现也毫无系统. 但是完数则易于计数，而且又顺理成章：因为在个位数里只有一个 6；十位数里也只有一个 28；第三个在百位数的深处，496；第四个却在千位数的尾巴上，接近一万，是 8128. 它们具有一致的特性：尾数都是 6 或 8，而且永远是偶数."

如果尼寇马克的意思暗指每一级位数中都有一个完数，那么他就错了，因为第五个完数是33 550 336. 不过他的猜想在其他各方面却很高明. 奇完数的不可能性虽然一直没有得到证明，却从来没有见过这种数字的例子. 还有，偶完数的尾数不是 6 就是 8，这是已经被证明了的.

希腊人非常重视完数，欧几里得(Euclid)在他的《几何原本》中特辟专章论述，即可见一斑. 其中，他证明凡是具有 $2^n(2^{n+1}-1)$形式的数，若第二个因数$(2^{n+1}-1)$是质数，则该数就是一个完数. 令 $n=1,2,4,6,12,16,18,30,60,88,106,$ [46]



126,我们就得出今天所知道的十二个完数.我们只要想到第十二个完数有七十七位,就可以想象得到验证这些数的困难性.更不寻常的是,欧几里得相信所有的完数都具有 $2^n(2^{n+1}-1)$的形式,欧拉(Euler)在 18 世纪证明:这一点对于偶完数是正确的.

10

质数从古以来就是个极为有趣的问题.在各种求质数的方法中,最有趣的一种叫作筛法.这个方法是和阿基米德同时代的埃拉托色尼(Eratosthenes)所发明的.埃拉托色尼的一百以内的筛法表见后图.其方法是,先把所有整数按其自然的次序写下来,然后首先划去所有 2 的倍数,再在所余之数中划去 3 的倍数,再划去 5 的倍数,如此类推.如果我们要求例如一千以内的质数,只消划到31的倍数就够了,因为$31^2=961$是一千以内的

埃拉托色尼的筛法表
求出一百以内的质数

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

最大的质数平方数.这个方法略加改进之后,就是今天用来构造质数表的方法.现代的质数表已经作到一千万了.

这种消去法虽很巧妙,但它纯粹是归纳性质的,因此不能用来证明质数的普遍性质.譬如说,第一个自然提出的问题是:质数究竟组成一个有限集合呢,还是一个无限集合?换句话说,质数的个数是无限的呢,还是有一个最大的质数?对于这个基本问题,欧几里得给了一个解答,它在数学编年史上被永铭为一个完美的典范. [47]

在这个证明中,欧几里得在历史上第一次采用我们现在所称的阶乘数.这是从1开始,n个连续整数的积,它们在数学问题上起着非常重要的作用.用来表示这些数的记号是$n!$.因此7的阶乘是$7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$.11以下的数的阶乘表在第43页可以看到. [48]

为要证明不存在着一个最大的质数,欧几里得这样论证:假若n是一个任意质数,那么,要么$(n!+1)$也是一个质数,要么在n和$(n!+1)$之间还有其他质数.这两种情况都是可能的:例如当n是3,其相应的欧几里得数是7,是一个质数;但是当n是7,$7! = 5\,040$,而相应的欧几里得数是5 041,是一个合数,它实际就是平方数,71×71.所以,在7和$(7!+1)$之间,有质数71.

为要证明这个问题的一般情况,欧几里得的方法如下:两个连续整数是没有公约数的;具体讲,$n!$和$(n!+1)$就是如此;因此如果后者含有质因数,这些质因数必定不会是n,或小于n的任何数.所以欧几里得数$(n!+1)$或者含有比n大的质因数,或者本身就是一个质数:不论是哪一种情况,都有大于n的质数存在.

他的结论是:不可能有一个最大的质数,这也就是质数的个数无限的另一种说法①.

① 参看附录8:质数的分布.

11

其次的问题是关于质数的分布情况，也可以说是质数的密度，例如，每一千个数中质数的个数. 这当然和计数某已知数以下的质数的数目是一回事. 许多近代的数学家用尽了最大的才智来解决这个问题，但迄今还没有得到完全满意的解答. 不过我们已经可以作出结论：越往后，质数并不实质上变得越来越稀疏.

[49]

1845 年，法国数学家伯特朗(Bertrand)断言，任何一个整数和它的倍数之间，至少有一个质数存在. 他的断言是建筑在他对质数表的调查的经验之上的. 五十多年中，这个命题都称为伯特朗假设. 它最后被俄国大数学家契比谢夫(Tchebycheff)所证明，契比谢夫还证明了在甚至更窄的限度内，也有质数存在. 末了，在 1911 年，意大利数学家博诺利斯(Bonolis)对这个问题作了很大的推进，他给出求 x 和 $\frac{3}{2}x$ 之间质数的数目的近似公式. 根据这个公式，在一亿和一亿五千万之间，至少有一百万个质数存在.

另一方面，又证明了所谓孪质数，例如(3,5)，(5,7)，(11,13)，(17,19)，(29,31)，(41,43)等，因数字之增大而渐变稀少. 这个卓越的定理是荷兰数学家布龙斯(Bruns)在 1919 年证明的.

12

我们怎么能识别一个已知数是质数还是合数呢？当这个数的末尾数字是 5，或是 0，或是一个偶数，我们就知道它是合数. 可是假如它的末尾是 3，7 或 9 呢？那么我们就有一种比较简单的检验法来求它是否具有被 3 或 9 整除的可除性：假如这个数所有各位数字的和是 3 或 9 的倍数，则这个数本身也是 3 或 9

的倍数.这个所谓的弃九法是很老的东西了①.

要求其他的因数,条件就复杂得多了.虽然巴斯伽(Pascal)在1654年,拉格朗日在一百年以后,都建立了极其普遍的定理,不过这些定理的出色之处在于数学上的精美,而不是实用的价值.迪克森(Dickson)教授在他的《数论史》中说得好: [50]

> "要决定已知的一个十五位或二十位的数是不是质数,不论用我们已知的哪一种方法,一个人终身也检验不完."

无怪乎若干世纪以来,人们千方百计企图找出一个适用于所有质数的普遍的数学公式;如果这一点办不到,至少找出产生质数的某些特殊方式.1640年,法国大数学家费尔马(Fermat)宣布他得到一个只代表质数的公式.由这公式所产生的数,现在叫作费尔马数.

下面是前面四个费尔马数:

$$2^2+1=5;2^{2^2}+1=17;2^{2^3}+1=257;2^{2^4}+1=65\,537.$$

费尔马检验出前面这几个数都是质数,因而当时都确信他的定理具有普遍性.然而,后来,他开始怀疑起来.事实上,大约一百年以后,欧拉证明第五个费尔马数已经是合数了,它的一个因数是641.自此以后,又同样得到证明,第六个、第七个和更高的十来个费尔马数都不是质数.

这表明不完全归纳法的危险性.还可以找到某些二次式提供的更生动的例子,如

$$f(n)=n^2-n+41.$$

我们发现,通过代入:$f(1)=41$,$f(2)=43$,$f(3)=47$,$f(4)=53$,……所得都是质数,这个情况可以一直证实到 $n=40$.可是当 $n=41$,我们显然得到一个合数:$f(41)=41\times41$.

---

① 参看附录9:可除性的判别准则.

[51]

13

寻求产生质数的普遍公式的失败，导致了寻求间接的检验质数的性质的准则．费尔马认为他已经找到了这样的准则，他的定理如下：*不论 n 是怎样的整数，若 p 是质数，则二项式 $n^p - n$ 为 p 的倍数*．取 $p=5$ 的情况为例，我们得到

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 + 1)(n^2 - 1).$$

显而易见，不论 n 是什么数，三个因数之中，总有一个是五的倍数．

费尔马定理的真实性，已由莱布尼茨、欧拉等人证明．现在麻烦的是，虽则定理是对的，但它不成为一个*准则*，就是说，*条件是必要的，然而不是充分的*．例如：341 不是一个质数，可是 $2^{341} - 2$ 却有 341 这个因数．

有一个有着必要而且充分的条件的准则叫作*威尔逊*(Wilson)*定理*．更正确地说，应当叫作莱布尼茨定理，因为后者第一个证明该条件是必要的．过了一百年，拉格朗日证明该条件又是充分的．看附表上的阶乘及其后继数，即欧几里得数 $n!+1$．注意当 $n+1$ 等于 2，3，5，7，11 等质数时，$(n+1)$ 是 $(n!+1)$ 的一个因数；而当 $(n+1)$ 是合数，如 4，6，8，9，10 等时，则 $n+1$ 除 $n!+1$ 就必有一余数．这是一个完全普遍的性质：*p 是质数的必要而且充分条件是 $(p-1)!$ 的后继数必以 p 为它的因数*．

这个惊人的命题具有重大的理论意义．然而，要直接证实 $(p-1)!+1$ 是不是 p 的倍数，在 p 很大的时候，与直接检验 p 是不是一个质数，一样的困难①．

---

① 目前所知的最大质数是 $2^{3\,021\,377} - 1$，它共有 909 526 位数．它是 1998 年 1 月由美国加州州立大学一名学生利用电子计算机发现的．——译者

威 尔 逊 准 则 威尔逊数是以 n 除 $(n-1)!+1$ 所得的余数. 若威尔逊数是零,则 n 是质数					
n	数 性	阶 乘 $(n-1)!$		$(n-1)!+1$ 欧几里得数	威尔逊数
2	质数	1! =	1	2	0
3	质数	2! =	2	3	0
4	合数	3! =	6	7	3
5	质数	4! =	24	25	0
6	合数	5! =	120	121	1
7	质数	6! =	720	721	0
8	合数	7! =	5 040	5 041	1
9	合数	8! =	40 320	40 321	1
10	合数	9! =	362 880	362 881	1
11	质数	10! =	3 628 800	3 628 801	0
12	合数	11! =	39 916 800	39 916 801	1

自此以后,又建立了许多间接的命题,其中最有趣的是哥德巴赫(Goldbach)假设.哥德巴赫是欧拉同时代的人.这条假设断言,每一个偶数都是两个质数之和.这条假设已经用直到一万的所有数试过,都证实是正确的.然而这个重要假设的证明却依然在向数学家的天才挑战!

14

"一个立方数不可能分成两个立方数,一个四次方数不可能分成两个四次方数,或者一般地说,任何一个大于2的幂,都不能分成两个同次方的幂.对这个问题我已经发现了一个真正奇妙的证明,可惜要写下这个证明来,这页书的空白太窄了."

这个著名的旁注快有三百年的历史了,从那时以来,不知有

多少数学家希望费尔马有一条再宽一点的书页空白，以便能把那证明写下来.

[53] 这个问题的历史可以追溯到埃及人，他们已经知道有这样的一个直角三角形，它的三边之比为 3:4:5. 实际上他们就用这个三角形作为木匠的矩. 据我所知，中国人即使在今天还在使用类似这样的方法.

毕 达 哥 拉 斯 数

不论 u 和 v 的值为何，只要 $2uv$ 是一个完全平方数，则可得出一个毕达哥拉斯三角形.

$$\begin{cases} x = u + \sqrt{2uv} \\ y = v + \sqrt{2uv} \\ z = u + v + \sqrt{2uv} \end{cases}$$

$2uv$	uv	$\sqrt{2uv}$	u	v	x	y	z
4	2	2	1	2	3	4	5
16	8	4	1	8	5	12	13
16	8	4	2	4	6	8	10
36	18	6	1	18	7	24	25
36	18	6	2	9	8	15	17
36	18	6	3	6	9	12	15
64	32	8	1	32	9	40	41
64	32	8	2	16	10	24	26

这是不是仅有的一个能用整数把三边表示出来的三角形呢？不是的，这样的三个整数此外还有无限多个，毕达哥拉斯派已经知道相当多这样的例子. 亚历山大利亚的丢番都(Diophantus)是公元 3 世纪人，他在他的《数论》中给出了一个求这种数的法则. 用现代的符号，这个问题相当于求方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

的整数解. 附表上载有几组毕达哥拉斯数，表端的公式则可使我们求出"一切"毕达哥拉斯数. 从这个公式看来，方程式 $x^2 + y^2$

$=z^2$ 不但允许有整数解，而且，其解显然有无限个①.

15

[54]

很自然的问题是，同型的高次方程式是否也是如此.

约在 1621 年，丢番都的《数论》在法国新版，费尔马得到了一册. 在这本书的一页上，费尔马写下了他的旁注，这个旁注此后便成了数学界的千古之谜. 用现代的术语，费尔马的陈述可以用公式表述如下：*求证方程式*

$$x^n + y^n = z^n,$$

式中 x，y 和 z 都是整数，当 n 是一个大于 2 的整数时，不可能有整数解.

这个问题的现况如何呢？欧拉证明当 n 等于 3 和 4 时的不可能性；狄利克雷(Dirichlet)得出了 $n=5$ 时的证明. 业已证明：若指数 n 为质数时定理为真，则指数为合数时定理亦为真. 还证实：对于非常大量的具有某种形式的指数，这个陈述也是真的；还有，当 n 小于 269 时，费尔马方程式无解. 然而，作为普遍的定理，却依然未经证实②，而且，费尔马本人对于他的定理究竟是否得出了普遍的证明，也大可怀疑.

费尔马问题之所以名气很大，是因为曾有轰动一时的十万马克的悬赏，作为完满解答的酬报. 这笔基金是一位沃尔夫斯寇尔(Wolfskoel)博士在 1908 年遗赠的，他本人为这个问题耗去了很多光阴，可是却没有进展. 此后，许多一向将他们的精力用于*化圆为方*、*三等分角*或是想发明*永动机*的业余爱好者们，就开始 [55] 集中力量于费尔马定理了. 据估计，从 1908 年到 1911 年之间，

---

① 参看附录 10：毕达哥拉斯数.

② 这个具有三百五十多年历史的世界难题已由英国数学家怀尔斯(Andrew Wiles)解决，论文发表于《数学年刊》(Annals of Mathematics)的 142 卷第 3 期(1995 年 5 月号)上.——译者

悬赏委员会所收到的这种“完满”解答就达一千份以上.幸喜委员会的公告规定,来稿必须是印刷出来的,这想必减低了一大批人的热情.有趣的是,我们看到,大部分投来的“解答”都是作者自己发行的.所有这些努力的共同特点是:作者们不但完全忽视了对这个问题已做过的大量工作,而且他们也没有兴趣去弄清楚该问题的困难究竟在什么地方.

这个问题吸引了近三世纪以来最大的数学家们的注意:欧拉和拉格朗日,库莫尔(Kummer)和黎曼(Riemann),他们都试图证明或反证这个定理,但都没有成功.如果将所有已经发表的关于这个问题的和有关论题的论文统统收集起来,足够开一个小图书馆了.

在求解费尔马问题的各种努力中,产生出了一种科学,它较之原来的问题本身要重要得多.其中有些结果如此重要和影响深远,使我们不禁认为这个问题一直没解决是件值得庆幸的事.例如,爱德华·库莫尔在试图证明费尔马定理的时候,就创立了他那有名的理想数理论,这是 19 世纪的最重要的和最丰富的成就之一.可惜限于本书的范围,我对这个有深远意义的概念即使是作扼要的叙述,也是不可能的.

16

在宗教神秘中诞生,经过迂回曲折的猜哑谜的时期,整数的理论最后获得了一种科学的地位.

虽然在那些把神秘和抽象等同的人看来,这仿佛是令人费解的,然而这种数的神秘性的基础,却是十分具体的.它包含两个观念.渊源于古老的毕达哥拉斯学派的形象化的数字,显示了[56] 数与形之间的紧密联系.凡表示简单而规则的图形,如三角形,正方形,角锥体和立方体等图形的数,较易于想象,因此被作为有特殊重要性的数而选择出来.另一方面,完数、友数和质数都具有与可除性相关的特性.这都可以追溯到古人对分配问题所

给以的重要地位，正如在苏美尔人的粘土片和古埃及的芦草纸上所明白显示出的一样.

这种具体性，说明了早期的试验的性质，这种特性今天多少还在这门理论中保持着. 我且引当代最卓越的数论专家之一，英国的哈代(G.H.Hardy)的话如下：

> "数论的诞生，比数学中的任一分支都含着更多的实验科学的气味. 它的最有名的定理都是猜出来的，有时等了一百年甚至百余年才得到证明；它们的提出，也是凭着一大堆计算上的证据."

具体往往先于抽象. 这就是数论之先于算术的理由. 而具体又往往成为科学发展中的最大绊脚石. 把数看作个体，这种看法自古以来对人类有巨大的魔力，它成了发展数的集合性理论(即算术)的道路上的主要障碍. 这正如对于个别星体的具体兴趣长期地延缓了科学的天文学的建立一样.

[57]

第4章 最末一数

"说过一遍的话,可以永远重复."

——埃利亚的芝诺(Zeno),据辛普里丘(Simplicius)所引.

1

数学中究竟有些什么东西使得它成为所谓精密科学的公认典范,并为其他未入精密之列的新兴科学奉为典则呢?的确,这至少是生物学和各种社会科学领域里的年轻研究者的雄心壮志,他们想要建立一套标准和方法,使得他们所研究的科学,也能加入已受数学支配的与日俱增的科学行列中去.

数学,不但是各种精密科学努力设计其本身结构的模范;而且又是将这些结构结合起来的粘合剂.任何问题,要是它所研究的现象不能用一个数学定律表述出来,实在不能算是解决了.究竟为什么,大家都相信只有数学的方法才可以使观察、实验和推演等有着精密科学所要求的精密、简洁和坚实的确定性呢?

当我们分析这些数学方法时,就会发现,它依据两个概念:"数"和"函数";而函数本身最终又可还原为数;数的一般概念所依据的又是我们所给与自然序列一、二、三、……等的性质.

[58] 因此,在整数的性质中,我们或许有希望寻出我们默认数学推理法为万无一失的线索!

2

整数性质的第一个实际运用,是以算术的基本四则运算的形式而出现的,即整数的加法、减法、乘法和除法.我们在很小的时候就学会了这些运算,无怪乎我们大多数人完全忘记了我们是在什么情况下学会它们的.现在让我们重新回忆一下.

我们开头背诵这样的表 $1+1=2, 1+2=3, \cdots$,我们练习又练习,直到能够不假思索地将十以内的任何两个数加起来.在我们初学的这个阶段,老师要我们注意 $5+3=3+5$,而且要我们注意这并不是偶然的,而是一条普遍的规律.后来,我们又学会了将加法的这种性质用语言来表示:*总和与相加各项的次序无关*.当数学家说*加法是一种可交换的运算*,而且用符号表示为:

$$a+b=b+a$$

时,也正是这个意思.

跟着,老师又告诉我们:$(2+3)+4=2+(3+4)$;意思是说,虽然 $(2+3)+4$ 是先把 3 加在 2 上,再在所得的和上加 4,可是我们相加的顺序其实没有什么关系,因为把 $(3+4)$ 的和加在 2 上,也可以得到同样的结果.数学家的简单一句话是,加法是一*种可结合的运算*,写下来是:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

我们从没有把这些陈述看作有多么重要.但它们确实是很基本的.更大的数相加的法则就是以它们为基础的.式子

$$\begin{array}{r} 25 \\ 34 \\ \underline{56} \\ 115 \end{array}$$

[59]

不过是下式的简写罢了:

$$25+34+56=(20+5)+(30+4)+(50+6)=$$

$$(20+30+50)+(5+4+6)=100+15=115.$$

在这里,加法的交换性和结合性起着重要的作用.

下面,我们来看乘法.我们又要记住一个长表,直到能机械地说出十以内任何两数之积为止.我们注意到,和加法一样,乘法也是可交换的和可结合的.虽然我们没有使用这些词,但意思是一样的.

另外还有一种关于加法和乘法联合使用时的性质.乘积 $7\times(2+3)$ 的意思是说,7 用 $(2+3)$ 的和也就是 5 来乘;可是将两个部分的积 (7×2) 和 (7×3) 加起来,也可以得到同样的结果.数学家用下面的普遍陈述来表达:乘法对于加法是可分配的,写下来是:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

在我们把大于十的数相乘时,分配性就是其基础.我们分析下列演算:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{43} \\ 75 \\ \underline{100} \\ 1075 \end{array}$$

我们发现,它不过是一大串运算的简写,在这大串的运算中,分配性是自由使用的.这样,

[60] $$25\times43=(20+5)\times(40+3)=[(20+5)\times3]+[(20+5)\times40]$$
$$=(20\times3)+(5\times3)+(20\times40)+(5\times40)=75+1000=1075.$$

3

这些事实,不但构成了思想家而且也是一切只要上过学的人的数学教育的基础.在这些事实上建筑了作为数学基础的算术,数学又支持了一切纯粹科学和应用科学,后者又是一切技术赖以进展的肥沃土壤.

后来,我们的智囊里又添进了许多新的事实、新的思想和新

的概念,可是它们在我们的心中,没有一个能像我们在六岁童年时期所学的那些整数的性质那么确实、那么根深蒂固.这就像人们常说的:这就像二加二等于四一样明显.

我们学习这些东西的年龄正是我们对事物是"怎么样"感到兴趣的时候.当我们长大到问事物"为什么"是这样的时候,这些法则经过经常不断的使用,已经变成我们智囊中如此密切的一个部分,以至于我们把它们视为理所当然的了.

个体的发展通常认为重复了它所属的那个种的进化.对于人类智力的进展,这些原理同样适用.在数学的历史上,"怎么样"常在"为什么"之先,某项学科的技术也常常早于它的哲理.

这对于算术特别真确.计数技术和计算法在文艺复兴时期之末已是世所遍知的事情,但是数的哲学直到19世纪最后的二十来年才独立成为一门学科.

4

[61]

随着年岁增长,我们有充分的机会把这些法则应用到我们的日常事务上,我们就越发确信它们的普遍性.算术的力量在于它的绝对的普遍性.它的法则不容许有例外:它可以应用于一切数.

一切数!所有的问题都维系于这个笔画简单而又重要无比的一切这两个字上.

如果这两个字只是用于事物或情况的任何有限类,那是没有什么神秘的.譬如当我们说,"一切活人"时,我们对此是有一个十分确定的意义的.我们可以设想把所有的人按照某种规则排列起来:在这种排列中,有一个最先的人,还有一个最末的人.可以肯定,要严格证明一切活人有某种性质是真确的,我们应对每个人来证明它.虽则我们知道若真这样作起来,会有许多难以克服的困难,然而我们认为,这些困难纯粹是技术性的,而不是概念性的.这对于任何有限集合,也就是说,任何既有最先一份

子,又有最末一份子的集合,都是真确的,因为任何这样的集合都可以通过计数把它穷尽.

当我们说一切数的时候,所指的也是这种情况吗?在这里,我们也可以把数的集合在想象中排列起来,这个排列有一个最先的成员,就是1.然而,最末的成员如何呢?

答案是现成的:没有最末的数!我们不能想象计数的过程是有尽头的.每一个数都有一个后继数.有着无限的数.

但是,如果没有最末的数,我们说的一切的数特别是一切数的性质是什么意思呢?我们怎样去证明这样一种性质:当然不能挨个检验每种情形,因为我们预先已经知道,我们是不能把所有情形都穷举完的.

[62] 就在数学的大门槛上,我们遇到了关于无限的二难论证.它好像传说中的巨龙,守卫着魔园的路口.

5

无限这个概念的根源、对于计数过程是无止境的这个信念的根源,究竟是什么呢?是经验吗?当然不是!经验教给我们的是一切事物、一切人类过程的有限性.我们知道,如果我们想通过计数把一切数字穷举完毕,其结果只是耗光了我们自己的力量.

无限的存在也不是由数学所能确定的,因为无限亦即计数过程的无止境,只是一种数学的假设,是算术的基本假设,全部数学就建筑在这上面.那么,它是一种超乎自然的真理吗?是人类被造物主投到宇宙中来,赤裸和无知,唯有自由谋生的时候,造物主赐给他的少数几种天赋之一吗?还是这无限概念是试图达到最后的数的努力失败后在人的头脑中产生的呢?还是它只不过是人类无力做到用数来穷尽宇宙的一种表白呢?

“最末一数是存在的,但是它不在人类力所能及的领域,因

为它是属于神的."这是古代大多数宗教的基调.天穹的星数、恒河的沙数、海水的滴数,都是人的智能所不能达到的这种极致的例子.赞美耶和华的诗人说:"他点数星宿,一一称它的名."摩西在请求上帝给他的选民以希望时则说:"能点数地上尘土者亦能点数你的种籽."

6

"盖隆(Gelon)王啊!有人以为沙子的数目是无限的;我说的沙,不只是在西拉库赛(Syracuse)和西西里(Sicily)一带的沙,而是指有居民和无居民的一切地域所能找到的沙.还有他们虽然不把沙数看作是无限的,却相信还没有命名一个大到超过这个数量的数.持有这种见解的人,若让他设想有一堆沙,像地球那样大,其中所有的海洋和低处统统填满,使它们和最高的山一样高,他会认为,更不可能表达超过这堆沙的沙粒的数目.然而我要用你所能了解的几何证法证给你看,在我所命名的数中,那些写在我送给宙克西巴斯(Zeuxippus)的拙作里的数中,有些不但超过如上所述的填满地球的大堆的沙数,并且可以超过像宇宙那样大的沙堆的沙数呢!" [63]

(阿基米德:《算沙者》)①

阿基米德的这个宇宙是一个以恒星为边界的球体.这个球体的直径,他估计等于地球直径的一万倍.假定装满一个罂粟籽的沙数为一万颗,而地球的直径在一万英里(三十万希腊尺)以内,他求出充满宇宙的沙数是一个极大的数字,若用我们的命数法,要用五十二位数来表示.为了表示这个数字,阿基米德发明一种新单位,名为奥克特德(Octade),相当于我们的一万万②.

① 参看附录4.

② 此地原文误为十万.——译者

化圆为方的尝试,提供了另一个例子.这问题的原来形式是求用直尺和圆规作一个正方形,与已知圆面积相等.要作一个正方形,和圆的内接正多边形例如正八边形等积,是可能的.另一[64] 方面,我们看到,如果我们把边数增加为16,32,64等等,我们就越来越密切地接近圆的面积.无疑,有些希腊的几何学家不是把这种加倍法看作一种近似法,而看作是一种得出圆的方法,也就是说,他们相信如果他们继续这样作下去,最终会得到一个在各点上都和圆相重合的最后的多边形.

有一种看来有道理的假设:早期的无限概念,不是不可计数,而是尚未数.最末的数意味着坚韧和耐心,而人类看来缺乏这些品德.这正和巴别(Babel)塔故事里的蹬天相似.最末的数,和天一样,是属于上帝的.上帝出于嫉忌的愤怒,使野心的造塔者的语言变混乱了①.

7

这种语言的混乱一直持续到今天.围绕着无限,产生了数学上的各种悖论:从芝诺的论证(Arguments of Zeno)直到康德和康托尔(Cantor)的二律背反.这个故事我们留到另一章来讲.现在要说的是,这些悖论促进了对算术基础的进一步的批判态度.因为,既然整数的性质构成了数学的基础,如果这些性质可以用形式逻辑的规则来证明,则全部数学就是一种逻辑的学问.但是,如果逻辑不足以建立这些性质,那么,数学在逻辑以外就还有所凭藉:它的创造能力所依据的是那种闪烁的难以捉摸的东西,即

---

① 典出《旧约·创世纪》所云:从前,有人动手建造一座城和一座塔,塔顶通天.耶和华嫉忌起来,他说:"看哪!他们成为一样的人民,使用一样的言语;如今既作起这事来,以后他们所要作的事就没有不成功的了."于是耶和华变乱天下人的言语,使众人分散在各地,城也停工不造了,所以那城名叫巴别(变乱之意).——译者

所谓人类的直觉.

这里请不要误解！现在的问题不是数的这些性质的真确性,而是用来证明这些性质的真确性的论证的真确性.自从数学的基础受到这样彻底的分析以来所引起争论,使主要的数学思想家划分为两军对垒的直觉主义者和形式主义者的那些问题就是:数学证明是由什么构成的?一般推理的本质特别是数学推理的本质是什么?数学上的存在是什么意思? [65]

8

严密推理的定律已经有着和南山一般的高寿.这些定律被亚里士多德构成一种系统的形式,不过在他之前很早就已经有人懂得了.因为,它们本是人类智慧的骨架:每一个具有智力的人在他的日常活动中都有机会应用这些规律.他知道,要想严密推理,首先必须把前提作明晰的规定,然后一步一步地应用逻辑的规则,最后达到一个结论,这个结论是他使用的逻辑方法所要达到的唯一结果.

如果这个结论和我们所观察的事实不符,第一步就得检查我们应用那些规律时是不是用错了.这里不是分析这些规律本身的真确性的地方,但这并不意味着它们能够在这批判的时代里免身于事外！恰恰相反:这些规律中的一条,的确已经成为近二、三十年来争辩的中心,这种争论迄今毫无稍微和缓的迹象.但这本身是一段史话,我们且等到适当的地方再说.

如果检查出逻辑的规律并没有用错,若尚有讹错的话,则这讹错可能意味着我们的前提出了毛病.或者我们的假设中隐藏着某种不相容之处,或者我们的某一个前提和另一个前提互相抵触.

为任何一门特殊的知识体系建立起一组假设,不是一件容易的事.这不但需要敏锐的分析判断,而且要有很大的技巧.因为,各个假设除了不能彼此矛盾外,还希望每一假设相对于其他 [66]

假设是独立的,并且整个系统又是穷尽的,就是说,要能完全包括所论的问题.数学中讨论这类问题的分支叫作公理学(axiomatics),它是由皮亚诺(Peano)、罗素和希尔伯特(Hilbert)这些人开拓出来的.这样,从前本是哲学的一个分支的逻辑,逐渐被吸收到数学体系中了.

再回到我们的问题,假设我们的诸前提经过检查,发现确无矛盾,那么,就可以说我们的结论在逻辑上是无瑕可指的,这个结论要是还不符合观察到的事实,那么我们便知所作的假设不适于它所应用的具体问题.缝工并没有把衣服做错.如果衣服穿起来上宽下窄,前凸后凹,那是穿衣人的过错.

9

上文所述的推理方法叫作*演绎法*.它从最普遍的性质出发,这些性质通常采取*定义*、*假设*或者*公理*的形式,再应用逻辑规则,从中推演出关于在特例中出现的种种事物或情形的陈述.

演绎法是数学推理的特征.在几何学中,几乎可以看到它的完整体现,由于这个原因,几何中的逻辑结构便成为一切精密科学的典范.

科学研究上还使用着另外一种方法,其性质和演绎法截然[67]不同:这就是*归纳法*.它通常被描述为由特殊到一般的方法.它是观察和实验的结果.要找出某一类事物的性质,我们尽可能地对它们作重复多次的观察或试验,每次的环境也尽可能地相同.在我们观察或实验的整个过程中,或许会出现某种确定的趋势.于是这种趋势就被当作这类事物的性质.例如,我们拿足够数量的铅块样品来作加热试验,我们发现每当温度计升到328度的时候,铅就开始熔化.我们得出结论:铅的熔点是328度.这个结论的背后是这样一个信念:不论再对多少块样品进行试验,只要试验的环境不变,其结果也必是一样的.

这种归纳过程是一切实验科学的基础,可是它*永远不容于*

严格的数学.不但用它来证明数学命题是个笑话,就连用它来确证某个已成立的真理,也是不可接受的.因为,要证明一个数学命题,不论证实多少例子也是不够的,而要反证一项陈述,只消一个例子就够了.一个数学命题如果它不会引出逻辑上的矛盾,它就是真确的,反之就是错误的.演绎法所根据的是逻辑上的矛盾律,别无其他①.

10

归纳法不容于数学是有一定的道理的.试以前章所提过的二次式($n^2 - n + 41$)为例,我们在这个式子里代入 $n = 1, 2, 3, \cdots$,直到 $n = 40$;每次的结果,我们都得到一个质数.我们能下结论说,对于 n 的一切数值,这个式子都代表质数吗?就连最少受过数学训练的读者也会看出这样一种结论的错误.可是有 [68] 许多被认为真确的物理定理,其证据比这还少.

数学是一种演绎科学,而算术则是数学的一个分支.这里归纳法是不容许的.算术的命题,例如即使在最简单的计算中也起着重要作用的运算的结合、交换、分配等性质,都必须用演绎法来论证.那么根据的是什么原理呢?

这原理有种种的名称:有叫作数学归纳法的,有叫作完全归纳法的,也有叫作递归推理原理的.只有最后一个名称可以接受,其他都是误名.归纳法这个词给这方法带来了一种完全错误的观念,因为这个方法并不含有系统试验的意思.

为在熟悉的领域中找出一个例证,让我们设想有一队士兵,每个士兵都被告知,把他所得知的任何情况传给他右边的人.一位刚刚来到场地上的指挥官想确定一下是否一切士兵都知道了某项已经发生的事情,他用得着每个士兵都去问吗?用不着,如果他确信每一士兵所知道的情报,其右边的人肯定也会知道,那

① 参看附录 11:拟似归纳法.

他只要确定左端第一人知道这件事情，就能够下结论说：一切士兵都知道它了．

这里所用的推论方法是递归推理的一个例子．它包括两个阶段．首先证明我们所想论证的命题是属于罗素所谓的遗传类型的：就是说，如果这个命题对于一个序列中的某一项是真的，那么，作为一个逻辑的必然，它对于该项的后继项也是真的．其次，证明这命题对于序列的第一项为真．这一步叫作归纳步．根据遗[69]传的特性，命题对于第一项为真，则对于第二项也为真，对于第二项为真，则对于第三项也为真，如此类推．我们这样继续下去，直到将整个序列穷举完毕，也就是说，一直到达它最末的一项．

11

证明中的两步，归纳步和遗传性，都是不可少的；单独的一步都是不充分的．费尔马的两个定理的历史可以作为例证．第一个定理可以陈述为，不论 n 是何数，$2^{2^n}+1$ 都表示质数．费尔马用实际试验的方法表明，这在 $n=0$，$n=1,2,3$ 或 4 时都是对的．但是他不能证明其遗传性；事实上，我们知道欧拉指出当 $n=5$时，它不成立，从而否定了这个命题．第二个定理是断言方程式 $x^n+y^n=z^n$，在 n 大于 2 时，没有整数解．这里的归纳步在于证明本命题在 $n=3$ 时是成立的，就是说，方程式 $x^3+y^3=z^3$ 没有整数解．很可能，费尔马证明了这一点，如果确是这样，这也提供了对那个有名的旁注的一种解释．不管怎么说，我们看到，这第一步是由欧拉完成的．剩下的是要证明这个性质是遗传的，就是说，假定这定理在 n 为某值(例如 p)时为真，作为一种逻辑的必然，应能推演出方程式 $x^{p+1}+y^{p+1}=z^{p+1}$也没有整数解．

值得注意的是，第一次明白地建立递归原理的，是天才的布莱兹·巴斯伽，他是费尔马的同代人和朋友．巴斯伽在他 1654 年发表的论文《算术三角形》中，陈述了这个原理．但是后来发现，

这篇论文的要点，其实已经包含在巴斯伽和费尔马讨论关于一个赌博的问题的通信中了，这也就是现在被看作是概率论从而 [70] 发展的核心的那次通信.

递归推理原理这个纯数学中如此基本的方法和概率论这个一切归纳科学的基础，二者都是在设法想出一种办法来分配两个赌徒的未决赌注时想出来的，这也真是神秘的冥思默想的一个好题材.

12

数学归纳法的原理在算术上的应用，最好的例证是证明整数加法是一种可结合的运算.用记号写出就是：

$$a+(b+c)=(a+b)+c. \qquad (1)$$

我们来分析 $a+b$ 这个运算：它意味着在数字 a 上加 1，在得到的结果上再加 1，这个方法连作 b 次.同理，$a+(b+1)$就意味着在 a 上连续加$(b+1)$次 1.由此得：

$$a+(b+1)=(a+b)+1, \qquad (2)$$

这就是命题(1)在 $c=1$ 时的情形.上面所作的构成了我们的证明中的归纳步.

现在要证遗传性了.让我们假设在 c 的某值例如n 时，这个命题为真，即

$$a+(b+n)=(a+b)+n. \qquad (3)$$

两边都加 1：

$$[a+(b+n)]+1=[(a+b)+n]+1. \qquad (4)$$

由于(2)，这个等式可以写成

$$a+[(b+n)+1]=(a+b)+(n+1)①, \qquad (5)$$

且由同样的道理，它等于

① 此式原书写作$(a+b)+(n+1)=a+[(b+n)+1]$，左右倒置，译时移改.——译者

$$a+[b+(n+1)]=(a+b)+(n+1)^{①}. \quad (6)$$

但是这就是命题(1)在 $c=n+1$ 时的情形.

[71] 所以,若原命题在某值 n 时为真,作为一种逻辑的必然,则在其后继数 $n+1$ 时也必定为真.既然它在 1 时为真,则在 2 时必真;既在 2 时为真,则在 3 时必真;如此类推,以至于无穷.

这里所用的数学归纳法原理的一般形式可以公式化如下:知道了涉及一个序列的命题对于序列的第一项为真,并知道了若假设它对于序列中某一特别项为真时,则作为一种逻辑的必然,该命题必对此项的后继项为真;据此,我们就可以下结论:这个命题对于序列的一切项都真.它用于兵士时的有限制的原理和它用于算术的普遍的原理二者之间的差别,只在对一切这个词的解释不同②.

让我重复一遍:正是根据数学归纳法的普遍的原理,而不是其有限制的原理,算术运算的真确性(当我们初次被引入数的奥秘中时,是相信它的正确性的)方才得以建立起来.

13

下节是由昂利·彭加勒的题为《数学推理的本质》的论文中摘引出来的.这篇划时代的文章作为对精密科学的基础的一系列研究的开端,发表于 1894 年.这篇文章的发表,吸引了一大群其他数学家开始了一个修正古典概念的运动,这个运动的最后发展是把逻辑几乎完全吸收到数学体系中.

[72] 彭加勒的巨大权威性,他的文体的精美,以及他那打破传统观念的思想,使他的著作远超出了范围有限的数学界.有些为他写传记的人估计他的作品有五十万读者,创造了数学界的空前

① 此式原书写作 $(a+b)+(n+1)=a+[b+(n+1)]$,译时移改.——译者

② 参看附录 12:数学归纳法举例.

纪录.

他本人作为数学的几乎所有分支,以及物理学、天体力学的创造者,具有卓越的内省能力,这使他能够分析他自己所取得的成就的本源.他的洞悉事物的头脑,对最基本的概念特别感兴趣,这些概念为人类习惯的厚壳所蒙盖而几乎硬不可入,其中包括数、空间、时间等.

14

“数学这样一门科学的可能性,本身就像是一个不可解的矛盾.如果这门科学只在表面上是演绎的,那么它从何处获得没有人敢去怀疑它的那种彻底的严格性呢?相反,如果它所阐述的每一命题都能用形式逻辑规则从其他命题演绎出来,为什么数学不能还原成为一个广大的重言式呢?三段论法并不能教给我们什么真正新的东西,而且,如果一切都是由同一律所产生出来的,那么,也就能把一切都还原成为同一律了.然而,我们能够认为,那些充满在卷帙浩繁的著作中的定理,不过是 A 是 A 的各种迂回说法吗?

“无疑的,我们可以回溯到公理上去,它们是所有这些推理的本源.如果我们确定地认为这些公理不能还原为矛盾律,如果我们在它们之中更少看到实验的事实……我们仍有办法把它们看作是先验的(a priori)判断.但这并没有解决困难,而只是给困难确定了一个名称……

“递归推理的规则是不能还原为矛盾律的……

无限的面前，这个逻辑原理便失灵了，经验在这里也变成无能为力了……

“那么这个判断为什么具有迫使我们接受的如此强大的力量？这是因为它不过是对心灵的能力的一种肯定：当一种动作是可能的时候，心灵就知道它有能力设想这同一动作的无限次重复……”

“我们必须承认，这和通常的归纳程序有极其相似之处．但是，其中有一个根本的不同．归纳法，当其应用于自然科学时，常是不确定的，因为它的基础是相信宇宙中有一种普遍顺序，一种在我们之外的顺序．相反，数学归纳法，即递归证法，把自身视为一种必然，因为它不过是心灵本身的一种性质……

“我们只能循着数学归纳法而前进，只有它能教给我们新的东西．如果没有这种与自然归纳法不同但却同样极为有用的归纳法的帮助，演绎法是无力去创造出一种科学来的．

“最后要注意，这种归纳法只是在同一运算能够无限重复时才是可能的．这就是下象棋的理论永远不能变成一种科学的原因：因为局中的各步并不是彼此相像的．”

15

压轴戏应该由名角来唱，所以，这一章本宜到此结束．然而，历史铁面无私，不会因人而异，彭加勒的思想所引起的争论今天仍然风行．因此，我必须加上一点鄙见，并不是企图对于这个论[74]点有何贡献，因为问题双方的饱学之士都已说得极为周详了．我的目的只是想使争论的焦点变得更为明显．

递归推理，当它应用于数的有限序列时，在逻辑上是无懈可击的．在这种限制的意义上，递归原理所断言的是：如果一个命题是遗传型的，那么它对于序列中的任何项的真假，视其对序列

的第一项的真假而定.

这种有限制的原理足以创造出一种有限的、有界的算术.比如说,我们可以因计数过程的生理上或心理上的限制,在自然序列的某处,例如一百万之处,加以截断.在这种算术中,加法和乘法,只要可能,就必是结合性的和交换性的;但是这两种运算却并不是永远可能的.例如,(500 000 + 500 001)和(1 000 × 1 001)这两个式子就是没有意义的,而这种无意义的场合显然远远多于有意义的场合.这种对整数的限制相应地引起了对分数的限制:没有一个小数能够在六位以上.而把$\frac{1}{3}$这类分数化为小数,也是没有意义的.无限均分和无限增长是同样地没有意义的,我们将一件东西均分成一百万份以后,就达到不可分的境地了.

在几何上也会有同样的情形.如果我们想象平面不是向四面八方无限展开,而是限于平面中的一个有界区域,例如说,是一个圆,在这种有界几何中,两条直线相交就会是一种不确定的事情;两条任意的直线不一定能成一个角;三条任意的直线也不一定能围成一个三角形①.

然而,这种有界算术和有界几何,不但在逻辑上是不可推翻的,而且,尽管初看起来似乎有些奇特,但它们比起人类世代相 [75] 传的各种无界的算术和几何来,反而更接近于我们所感觉的实在.

16

数学归纳法的有限制的原理,包含着一串有限多个三段论,每一个自身都是一致的:由于这个原因,该原理实际是古典逻辑的一个结果.

然而算术证法中所用的方法,即完全归纳法的普遍的原理,

① 参看附录13:论有界几何.

却远远超出了有限制的原理的范围.我们不能满足于说,一个对1真的命题,如果它对任一数为真时对其后继数也真,则这命题对一切数都真.它隐含地断定每一数都有一后继数.

这种断定不是逻辑的必然,因为它不是从古典逻辑的定律所推出的.这种断定也决不是我们所能想象的唯一东西,因为与它相反,假定一个数的有限序列,从而引出的有界算术,也是同样站得住脚的.这种断定也不是由我们感觉的直接经验所引出,因为我们的一切经验都宣告它是错误的.最后,这种断定也不是由实验科学的历史发展所得的结果,因为一切最新的证据都指出宇宙是有界的,而且从原子构造的最新发现看来,物质的无限可分性也应当称之为一种神话.

无限的概念虽然不是由逻辑或经验强加给我们的,但它却是一种数学的必然.那么,当一个动作一旦可能,我们的心灵就能够设想这个动作的无限次重复,这种心灵力量的背后究竟是什么呢?对于这个问题,我将在这部书中反复进行讨论.

第5章 符 号

"我们无法避开一种感觉,即这些数学公式自有其独立的存在,自有其本身的智慧;它们比我们还要聪明,甚至比发明它们的人还要聪明;我们从它们得到的,实比原来装进去的多."

——亨利希·赫茨(Heinrich Hertz)

1

代数学,就今日所用的这名词的广义上说,所论的是符号形式的运算.就这种意义来说,它不但渗透了全部数学,而且侵入了形式逻辑甚至形而上学的领域.不但如此,按照这种解释,代数的历史简直和人类驾驭普遍性命题的能力同样地古老;和人类辨别某些和任何的能力同样地古老.

然而,这里我们感兴趣的只是一种很狭义的代数,即广义代数中应当叫作*方程式论*的部分.代数(Algebra)这个名词最初也正是在这种较狭的意义上使用的,这个字来自阿拉伯文."Al"是阿拉伯文的冠词,相当于英文的 the, gebra 是动词,有安置、复位的意思.在今天,西班牙仍用 Algebrista 这个字来指施行某种接骨手术的人.

代数这个字,恰巧出自穆罕默德·本·穆萨·阿勒·花剌子米(Mohammed ben Musa Al Kworesmi)所著的书名的变称.前面已经说过,这位阿勒·花剌子米是大有功于位置命数法发展的人. [77]

他的著作的全名是:《Algebar wal Muquabalah》,准确的译法是:《论复位及调整》.本·穆萨所用的复位一词和我们今天所用的移项一词同义,就是将方程的诸项从等号一边移到另一边,例如,把 $3x+7=25$ 移成 $3x=25-7$.

2

原始代数的遗迹已发现于苏美尔人的粘土片上,并且似乎在古埃及人中已经发展到了很高的程度.的确,公元前 18 世纪以前的兰德(Rhind)古芦草纸①,已经载有论及食品和其他物资分配的问题,这些问题导致了简单的方程.这些方程的未知数用"堆"(hau)表示;加法和减法则表示为人脚从被运算的对象向前走或向后走.芦草纸上有一位叫阿赫美斯(Ahmes)的署名.由文本中的许多明显的谬误看来,这位阿赫美斯不过是一位书吏,他对他所抄写的东西实在只有一知半解.所以,可以猜想古埃及人的文化程度比这个芦草纸要我们相信的要高些.即使照现在这样,埃及人的代数无疑要比古芦草纸早好几百年.

在各个不同国家,代数的发展通常连续经历三个阶段:文辞阶段、缩写阶段和符号阶段.文辞代数的特点就是完全不用符号.当然,文字的使用本身就具有符号的意义这点除外.到今天,文辞代数应用于如"各项之和与项的次序无关"这类陈述,它以符号表示则为 $a+b=b+a$.

缩写代数是文辞代数的进一步发展,埃及的代数就是它的一个典型例子.某些常用的字逐渐缩写起来,最后紧缩到连它们的原义也完全忘记了,这使得符号和它们原来所表示的运算已没有什么明显的联系.缩写已经变成了一种符号.

"+"和"-"两个符号的历史可以作为例证.在中世纪的欧

① 这个古埃及文献是苏格兰人亚历山大·亨利·兰德在 19 世纪所发现的.——译者

运算		加	减	乘	除	乘方	等于	未知
现代符号		+	−	$\times \cdot ab$	$: \div \frac{a}{b}$	a^2, a^3	=	x, y, z
来源	世纪							
埃及	17^{th}BC				$\frac{1}{3}$=[illegible]			[illegible]
亚历山大利亚的丢番都			⋔		$\frac{1}{3}=\gamma''$			ς
印度	11th	梵语 ya	在数字上加一点			$x^2=\square$	− − −	या
意大利	16th	p̄	m̄					
日耳曼	16th	+	−					
斯台文(Stevin)(比)	16th	+	−			$x^2=$② $x^3=$③	Feraegale	○
雷考德(Recorde)(英)	16th	+	−				=	
维叶塔(Vieta)(法)	17th	+	−	in	$\frac{3}{4}$	$D^2=D$ 在方框中	Aequabantur	A, E, O
奥特雷德(Oughtred)(英)	17th	+	−	×	$\frac{3}{4}$	$x^4=$[4]		
哈里沃特(Harriot)(英)	17th	+	−			$a^2=a^2$ $a^3=a^3$	=	a, b, d
笛卡儿(Descartes)(法)	17th	+	−		$\frac{3}{4}$	$x^2=x^2$ 或 $x\ x$	∝	x, y, z
莱布尼茨(Leibnitz)(德)	18th	+	−		$\frac{a}{b}$	$a^3=$[3]a	=	任何字母

符号的演变

洲,减号一向用 minus(减)整个字来表示,以后才用在第一个字母 m 上面加一画来表示.久而久之,字母本身淘汰了,只剩下所加的一画.加号也经过类似的演变.读者可以参看前面的图表,这是几个标准记号的编年史.

3

丢番都以前的希腊代数本质上就是文辞代数.希腊人为什么这样不善于创造出一套符号体系,对这个问题曾经提出了多种解释.最流行的一种理论是:希腊文的字母同时代表着数目,如果用同一字母来表示一般的量,容易引起混淆.有人指出,丢番都看到希腊的字母 ς 有两种书写的形式:σ 和 ς ,σ 表示 60,但是后一个 ς 却没有数值意义,因为这个原因,丢番都用它来代表未知数.

事情的真实情况是:丢番都的未知量记号更像是希腊字 arithmos(数)的第一音节的缩写,他就是用这个名字来称呼问题中的未知数的.此外,上述理论似乎忽略了下述情况:希腊文中[80]只有小写字母是当作数字用的.希腊人实在还可以自由应用他们的大写字母作为记号,而且他们的确也是这样用的.

然而,这些大写字母却从来没有被用作运算符号,而只是用作标记,在几何图形上用来指示各个不同的点和元素.这种描述性的记号,我们今天仍用来指明几何图形上的各个不同点,不要忘记,这种习惯是希腊人留下的遗产.

真的! 希腊的思想太具体了,所以它本质上是非代数的.抽象的代数运算所研究的是有意地除去其实质内容的对象,这不是对研究物体本身最感兴趣的希腊人所能够想象的.符号不是一种空洞的形式,它是代数的本质.没有这样的符号,对象就是人类的感知,它反映出人的感官把握对象的各个方面;用符号代替之后,对象就变成了一个完全的抽象物,只是某一指定运算的运算对象而已.

4

希腊思想刚要从可塑造的阶段脱颖而出的时候，就进入了衰落时期．在希腊文化的这个衰落的时期，产生了两位突出的人物．他们都生活在公元第3世纪，都来自亚历山大利亚（Alexandria），都在传播新理论的种子，这些理论深远得使同时代的人不能理解，而注定要在若干世纪之后才成长为重要的科学．帕普斯（Pappus）的"设解不定论"（Porisms）预见了投影几何，丢番都的问题则为近代的方程式论打下了基础．

丢番都是希腊数学家中率直承认分数是数的第一个人．他又是不仅对简单方程，而且对二次和更高次的方程作了系统处理的第一个人．尽管他的符号体系很繁琐，尽管他的方法不精美，可是他应当被看作是近世代数的先驱． [81]

然而，丢番都是烛火将熄时的回光返照．在西方世界，漫长的中世纪的黑暗时代开始了．希腊文化的种子注定要在异国的泥土中发芽生长．

5

印度人也许继承了希腊科学中的某些纯事实，但没有继承希腊人批判的敏才．天使徘徊而不敢涉足的地方，愚夫往往就闯进去了．印度人不受严谨性的谴责的束缚，也没有诡辩家来麻痹自己的创造性想象．他们随便运用整数和比，运用零和无限，并且运用其他许多字；例如，同是Sunya一字，既用以代表虚无（它最终就变成了我们的零），又用来表示未知数．

然而印度人的素朴的形式主义比希腊人批判性的严谨，对代数的发展更有功绩．固然印度的代数是缩写的代数，但它却很高明．它的符号不过是代表对象或运算的原字的第一个音节罢了；然而他们不但有了基本运算和相等的符号，并且还有了负数的符号．不仅如此，他们还得出了一次和二次方程的移项、变形

等各种法则.

他们所处理的问题的类型确实很简单,这正是那个阶段的代数的典型.我们可以从《莉拉瓦蒂》(Lilawati)中引两个问题,这是一本写于公元8世纪的普通神学的论著:

"从一束纯洁的荷花中,取三分之一献给大自在天,五分之一献给毗湿奴,六分之一献给太阳神;另外四分之一送给天女.所余的六朵送给可敬的教师.请快告诉我,共有荷花若干朵?"

[82]

"在一次打情骂俏中,将一串项链弄断了.三分之一的珠子落在地上,五分之一散在床上,女子寻得六分之一,她的情人寻得十分之一;线上还剩下六粒.问原链共有若干珠子?"

6

印度的数学在欧洲没有发生什么直接的影响.但是阿拉伯人无疑从婆罗门知识的代表者那儿学到了算术和代数,这些婆罗门在第9和第10世纪中,在开明的哈里发的宫廷受到盛情的款待.这个时期的穆斯林文明乃是两种文化的混合:东方文化和希腊文化.大量的梵文和希腊文的古典文学、科学和哲学被译成阿拉伯文,并且为阿拉伯学者所热诚研究.许多这种译本被保存至今,成为历史知识的丰富源泉.关于这一点,我们不要忘记,收藏希腊古代文物最丰富的亚历山大利亚图书馆,曾经两度被洗劫和毁坏过:第一次是4世纪的基督教蛮汉,第二次是7世纪的狂热的穆斯林.其结果,一大批古代手稿散失了,如果不是阿拉伯译本,它们就无从留传给后世了.

人们常常说,阿拉伯人的历史使命就是在这个过渡时代充当了希腊文化的保护人.对此,他们确实非常称职.但是,除此以外,他们还以自己的卓越贡献丰富了这个宝藏.在这个时期的许多第一流数学家中,我可以提出一个人,这个人的名望是有文化

的人所共知的：这就是莪默·伽亚谟(Omar Khayya'm)．这位《鲁拜集》(Rubaiyat)的作者，原是哈里发宫廷的一位天文官．虽然 [83] 《鲁拜集》是用波斯文写的，而莪默却写了一本阿拉伯文的代数，在这本著作中，他充分利用了他的希腊几何和印度代数的知识来解三次和四次方程．他其实可以尊为图解法的创始人．此外，还有迹象表明：他在牛顿(Newton)之先发明了二项式定理①．

虽然这样，阿拉伯人却不曾在符号方面有丝毫的改进．阿拉伯人接受了印度的代数，却没有保留其奇妙的缩写符号体系，这是数学史上一个最奇怪的现象．反之，他们退回到希腊的文辞代数阶段，有个时期甚至于在其代数论著中，干脆除去数字记号，而宁愿把每一个数全部写出来．这是不是因为阿拉伯人过于想作希腊文化的嫡系，以至于否认他们曾得益于婆罗门文化呢？

7

当穆斯林文化达到其最高点时，欧洲还在沉睡之中．关于这个黑暗时代及紧接着的几个过渡世纪，大数学家雅科比(Jacobi)在论笛卡儿的演说中作了一个精采的素描：

> "历史上有过一个子夜，这我们可以大致确定在纪元一千年前后．这时代，艺术和科学几乎从人类的记忆中消失了．异教主义的晚霞已经消逝，而新生的日子尚未开始．世界上文化的痕迹只有在萨拉逊人之中才可以找到，某个教皇求知心切，乔装进入他们的大学，这因此成了西方的奇事．最后，基督教徒倦于向殉教者的枯骨去祈祷了，结队走向救世主本人的坟墓，在那里再次发现的只是墓室已空，基 [84] 督又死而复活了．人类也就由死中复活过来了．他们重新开展了生命的事务和活动；艺术和工艺都狂热地复兴起来．城市繁荣了，新的居民区建立起来．契马布埃(Cimabue)重新

① 参看附录14：方程的图解法．

发现了湮没了的绘画艺术；但丁(Dante)重新发现了诗.此外,阿贝拉尔德(Abelard)和圣托马斯·阿奎那(Saint Thomas Aquinas)等人,以极大的果敢精神,毅然把亚里士多德的逻辑观念引入天主教,从而建立了经院哲学.然而当教会把科学置于它的卵翼之下时,它就要求科学所活动的方式必须同教堂自己的法规一样,无条件地服从于权威.这样一来,经院学派不但远不能解放人类精神,反而把它禁锢了几百年,直到科学自由研究的可能性本身也变得十分可疑.最后,曙光终于破晓,人类重新获得保证,决心利用自己的天赋才能,在独立思想的基础上,创造出一种关于自然的学问.历史上这个黎明时期就叫做文艺复兴或知识的复活."

这里谈到十字军,它的目的当然一点也不是去寻求文化.可是十字军所完成的恰恰就是这桩事情.三个世纪以来,基督教的列强用长剑把他们的"文化"强加给穆斯林.但是唯一的结果却是:阿拉伯人的更先进的文化徐缓而稳步地渗入了欧洲.西班牙和地中海东岸的阿拉伯人,对欧洲的文艺复兴实在是大有功劳的.

文艺复兴始于意大利.数学的第一部知名之作是菲波纳契(Fibonacci)写的,他是一位具有非凡才能的人,他的深见远识远远超过他所生活着的13世纪.他的职业是一位商人,广历近东各地,吸取了那个时代阿拉伯的知识;但他同时对希腊的数学文献又很娴熟.他在算术、代数、几何上的贡献,成为此后三百年间意大利数学的丰富源泉.关于这一点,且留到下一章再说.

[85]

8

代数史上的转折点乃是16世纪后期法国人维叶德(Viète)所写的一篇短论,他在写作时总是使用拉丁名:弗朗西斯科·维叶塔(Franciscus Vieta).他的伟大成就在我们今天看起来是十分简单的.从他的论文中可以总结出下面一段:

"在这里,我们用一种技巧来帮助我们区别已给的量和所求的或未知的量,这就是用一种有永久性质的、易于理解的符号体系——例如,用 A 或其他母音字母表示未知量,用 B,C,G 或其他子音字母表示已知量."

这种母音－子音记号的寿命不长.在维叶塔死后的半个世纪内,出现了笛卡儿的《几何学》,其中用字母表开首的字母表示已知量,末尾的字母表示未知量.笛卡儿的记号不但取代了维叶塔的记号,并且一直沿用到现在.

维叶塔的主张虽然在形式上很少被应用,但是在精神上无疑是被采用了.有系统地用字母来代表未定的但保持不变的数量,如他所称为"逼真算法"(Logistica Speciosa)的办法,在数学发展上占有卓著的地位,这是维叶塔的伟大贡献.

9

外行人是不易评定维叶塔的贡献的真正价值的.这种文字记号难道不仅仅是一种形式而已吗?最多也不过是一种方便的 [86] 速记吧?毫无疑问,写作

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

是很经济的,但它真的就比我们说,两数和的平方等于两数平方的和加上两数乘积的二倍,这样一句与上述恒等式等同的话,表达更多的意思吗?

文字记号在这里又和一切最成功的改革一样,遭到了同样的命运.它的普遍应用使人难以相信,竟会有个时期流行种种比它拙劣得多的笨办法.今天,用字母表示一般数量的公式几乎和通常文字一样地常见,许多人都把我们运用记号的能力看作是凡有智力的人几乎都有的天然禀赋;但它之所以成为自然的事情,不过是因为它已经变成了我们头脑中的固定习惯而已.而在维叶塔的时代,这种记号却成为一种对世代传统的根本变革.说老实话,这种方法连伟大的丢番都以及他的聪敏的阿拉伯的后

继者都没有想到,天才的菲波纳契几乎发现了它,却又失之交臂,这样的一种方法我们能说它是来自天然的吗?

10

算术的历史和代数的历史有个显著的相似之点.在前者,我们已经看见,人类和一个没有零的符号的不够用的命数法苦斗了几千年.在后者,由于缺乏一般的记号,使得代数成为一堆解数值方程的偶然的方法.正如零的发现创造了今日的算术,字母记号也使代数史开辟一个新的纪元.

这种符号体系的威力在什么地方呢?

[87] 首先,字母将代数从字句的束缚下解放出来.我的意思不但是说,如果不用字母记号,则任何普遍陈述都成了一大串累赘的言语,会受到人类语言的种种含糊和误解的影响,这一点已经相当重要了;但是更重要的是:文字有因若干世纪的使用而连带的种种禁忌,字母则完全没有.丢番都使用的 arithmos,菲波纳契使用的 res,都是有先入之见的概念:它们意味着一个整数.但是维叶塔的 A 和我们现在所用的 x 是不依附其所假定代表的具体事物而独立存在的.符号有一种超越它所象征的事物的意义:这就是为什么符号不仅仅是一种形式的缘故.

其次,字母可以使人在变换文字表达式时便于操作,从而把任何陈述都变为许多等价的形式.正因为具有这种变形的能力,代数超出了方便的速记的水平.

在引入字母记号之先,只能论及各别的式子;每个式子,诸如 $2x+3$;$3x-5$;x^2+4x+7;$3x^2-4x+5$ 等式,各有其独自特点,只能一个个地按其本身的特点来处理.字母记号能从个别转到集体,能从“某些”转到“任何”及“一切”.一次式 $ax+b$,二次式 ax^2+bx+c,每个这样的式子现在都可看作单独的一类.正由于此,才有可能得出作为一切应用数学的基础的函数的一般理论.

11

但是,"逼真算法"的最重要的贡献,也是我们在本书中所最为关心的问题,是它在一般数概念的形成中所起的作用.

当我们限于处理数值方程,例如

(Ⅰ) $x+4=6$, $2x=8$, $x^2=9$; (Ⅱ) $x+6=4$, $2x=5$, $x^2=7$ [88]

时,我们可以满足于(就像中世纪大多数代数学家所做的那样)这样的陈述:第一组方程可解,第二组方程不可解.

但是当我们讨论同样类型的字母方程:

$$x+b=a,$$
$$bx=a,$$
$$x^n=a$$

时,由于数据的不定性,使我们不得不对问题作出指示性的或符号性的解答:

$$x=a-b,$$
$$x=\frac{a}{b},$$
$$x=\sqrt[n]{a}.$$

之后,我们再规定:a 一定要大于 b,式子 $a-b$ 才有意义;a 如果不是 b 的整倍数,$\frac{a}{b}$就没有意义;除非 a 是完全的 n 次方数,否则$\sqrt[n]{a}$就不是一个数,这样做将是徒然的.因为将无意义的东西写下来本身就给了它一个意义;我们很难否认已经有了一个名称的事物的存在.

再者,我们是以 $a>b$,a 是 b 的倍数,a 是完全的 n 次方数等为前提,去发现对 $a-b$;$\frac{a}{b}$;$\sqrt[n]{a}$等符号的运算法则的.但是,这些符号表面上并没有什么标志可以使我们识别哪些是合法

的，哪些是不合法的，这使得我们早晚总会提出，即使把这些符
[89] 号当作真正的数来演算也不会出现什么矛盾.这离把这些符号看作是广义的数只差一步了.

12

以上就是早期的代数史的大致轮廓，或者更恰当地说，是与它逐渐引出一般数概念有关的一个方面.由于两个原因，我们现在必须离开历史的路线.第一，因为在维叶塔的时代之后，数学的发展太快了，要系统地叙述其过程，不是本书范围所及.再者，当只限于技术方面的进展时，它的发展对于数的科学的基础没有什么重大的影响.

今日的算术和维叶塔以前的算术的区别在于对"不可能"的态度的转变.17 世纪以前的代数学家赋予这个名词以绝对的意义.认定了自然数是一切算术运算的特有数域，他们把可能性，或者说，限制了的可能性，视为这些运算的内在性质.

因此，算术的直接运算——加法（$a+b$），乘法（ab），自乘（a^b）——是全可能的；而逆运算——减法（$a-b$），除法$\left(\frac{a}{b}\right)$，开方（$\sqrt[b]{a}$）——则只在有限制的条件下是可能的.维叶塔以前的代数学家，只满足于陈述这些事实，他们不能对问题作更深入的分析.

现在，我们知道可能和不可能，各自只有相对的意义；二者都不是运算的内在性质，而仅是人类传统对于所运算的数域所加的一种限制.除去了这种限制，把数域扩大，不可能就变成可能了①.

[90]

13

算术的直接运算所以是全可能的，因为这些运算不过是一

① 参看附录 15：几何中的"可能"和"不可能"两个术语.

系列的重复运算，一步一步地深入到自然数的序列中，而自然数则先验地假定为无限的．若除去这个假定，把运算域限于一个有限的集合（设为一千以下的自然数），则如 $925+125$，或 67×15 的运算就变为不可能的了，而相应的式子也就失去了意义．

或者，设我们的数域只限于奇数．乘法还是全可能的，因为任何两个奇数的积还是奇数．可是在这种限制的域之中，加法成为完全不可能的运算，因为任何两个奇数的和绝不可能是奇数．

再举一例，若数域只限于质数，则乘法就不可能了，理由很简单，因为两个质数之积绝不能是质数；而加法则只在极少数的场合中是可能的，譬如两项之中一项是2，另一项是孪质数中的较小的一个，如 $2+11=13$．

还有别的例子可以引证，不过即使这少数几个例子已经足以显示出可能、不可能、无意义诸词的相对性了．一旦认识了这种相对性，自然会问：能否把限制的数域作适当的扩大，使算术的逆运算也和直接运算一样成为全可能的？

若欲使减法为全可能，只要把零和负整数加到自然数的序列中就够了．由此而创造出来的数域叫作一般的整数域．

同样，将正负分数加到整数域中，就使得除法也成为全可能的了．

这样产生出来的数——正负整数、正负分数和零——就构成了有理数域．它代替了整数算术的自然数域．四种基本运算，〔91〕原只是应用于整数的，现在就准此类推地推广到这种广义的数上了．

我们可以做到这一切而不会产生矛盾．不但如此，除了下面我们将说明的一点保留之外，任何两个有理数的和、差、积、商本身还是有理数．这个非常重要的事实常常表示为下列陈述：有理数域对于算术的基本运算是闭合的．

那个唯一的但又很重要的保留，就是以零作除数．这相当于求方程 $x\cdot0=a$ 的解．如果 a 不等于零，这方程式是不可能的，

因为我们在给零以定义时，就不得不承认等式 $a \cdot 0 = 0$ 了. 所以，不存在一个能满足方程 $x \cdot 0 = a$ 的有理数.

反之，方程 $x \cdot 0 = 0$ 对于 x 的任何有理数值都能满足. 因此，这里的 x 是一个*不定数量*. 除非引出这方程的问题可提供其他一些情况，我们必须把 $\frac{0}{0}$ 看作表示任何有理数的符号，而 $\frac{a}{0}$ 则当作没有有理数的符号.

14

这些讨论虽然好像很繁琐，可是用符号，它们可简化成下面的陈述：设 a, b, c 是任意有理数，而 a 不等于零，则必有一个，且只有一个有理数 x，能满足方程

$$ax + b = c.$$

这个方程叫作*线性方程*，它是各种方程中最简单的类型. 接[92]着线性方程的是二次、三次、四次、五次以至于一般任何次的代数方程，次数 n 指下面方程中未知数 x 的最高指数：

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + px + q = 0.$$

但即使这些方程也还没有穷尽为数无穷的各种方程；*指数方程*、*三角函数方程*、*对数方程*、*圆函数方程*、*椭圆方程*等等组成了一个范围更大的种类，它们通常归在一个包罗万象的术语即*超越方程*之下.

是不是有理数域对于处理这些无穷多种类型的方程完全够用了呢？在下章我们可以看到，这是太不够用了. 我们一定会预料到，数域的推广将是越来越复杂. 但是这种推广并不是任意的；在这种推广计划的机制中，隐藏着一个主导的统一的观念.

这个观念有时叫作*固本原则*. 它是德国数学家赫尔曼·汉克尔(Hermann Hanckel)在 1867 年首次明确地建立的；不过这个观念的萌芽已经包含在威廉·罗万·汉密尔顿(William Rowan Hamilton)爵士的著述中了. 汉密尔顿是 19 世纪最有创造性、最

富成果的思想家之一.

现在我把这个原则用定义的形式表述出来:

一个包含无限多的符号的集合,当其可以满足下述条件时,就叫作一个数域,其中每个单独元素则叫作一个数.

第一:在该集合的元素中,可以找出一个与自然数的序列相一致的序列.

第二:我们要能建立一种等级判别准则,用这准则可以判别任何两个元素是否相等;如果不等,则判别孰大孰小.若这两个元素都是自然数时,这些判别标准就化为自然标准.

第三:对于集合中的任何两个元素,可以设计出一种加法和乘法,它们具有自然运算中加法和乘法所具有的交换、结合、分配 [93] 诸性质,若两元素均为自然数,则此两种运算就化为自然运算①.

15

这些十分一般的讨论,没有谈到固本原则如何运用于特殊情况的问题.汉密尔顿使用了一种他称之为代数匹配的方法来说明这种方法.我们举有理数来作例释.

若 a 是 b 的倍数,则符号 $\frac{a}{b}$ 表示以 b 除 a 的运算.所以 $\frac{9}{3}=3$ 的意义是说,所表示的除式的商为 3.现在,设有两个这样表示的除式,是否有方法不实际进行运算就能决定其结果是相等,或孰大孰小呢?答案是肯定的;我们有下面的

$$\text{等级判别准则}\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{如 } ad=bc; \\ \frac{a}{b}>\frac{c}{d}, \text{如 } ad>bc; \\ \frac{a}{b}<\frac{c}{d}, \text{如 } ad<bc.\end{cases}$$

① 参看附录 16:相等的意义.

还可以更进一步：不需将所表的除式实际算出，我们也能制定出关于所表示的数量的运算法则：

$$加法：\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};$$

$$乘法：\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

[94] 现在让我们不再假定 a 是 b 的倍数．我们把$\frac{a}{b}$看作数学实体的一个新领域中的符号．这些符号实体依赖于依一定次序书写的两个整数 a 和 b．对于这种数偶的集合，我们也加以上述的等级判别准则：即我们认为，例如：

$$\frac{20}{15}=\frac{16}{12},\quad 因为\ 20\times12=16\times15;$$

$$\frac{4}{3}>\frac{5}{4},\quad 因为\ 4\times4>5\times3.$$

我们对这些数偶定义运算，其规则与前面提到的当 a 是 b 的倍数及 c 是 d 的倍数时的运算规则相一致，例如：

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{(2\times5)+(3\times4)}{5\times3}=\frac{22}{15},$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}.$$

现在，对于固本原则的一切假定都满足了：

1．新数域包含着自然数为其子数域，因为我们可以将一切自然数写成数偶的形式：

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\cdots$$

2．新数域具有等级判别准则，若$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$都是自然数，这判别准则就还原为自然数的判别准则．

[95] 3．新数域也有两种运算，它们具有加法和乘法的一切性质，若$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是自然数时，这两种运算就还原为自然数的加法和

乘法.

因此,这些新实体满足固本原则的全部假定.它们已经证明有资格和自然数排在一起了,已经有资格当得起数这个称号了.它们从此就被承认了.这个包括了新旧二者的数域,被正式命名为有理数域.

16

乍看起来,固本原则在对运算的选择上似乎条件太宽,从而使得它所假定的广义数没有多大的实际价值.但是,有关自然序列必须是数域的一部分,以及基本运算必须具有交换、结合、分配诸性质(如自然运算那样),这些限制(我们将在下面看到)只有很特殊的数域才可以满足.

按照固本原则建立的算术,其情形可比之为一个一心想扩张但又想永久保存那些使其强大的固有的根本法律的国家的政策.这两种不同的目标——一方面力图扩张,一方面保持统一——自然会影响到接受新邦加入联邦的种种规定.

因此,固本原则的第一点相当于宣布:原核心邦将为整个联邦定基调.其次,原邦是一种寡头政治,其国民各有等级,新邦必须同此.这个条件相当于固本原则的第二点.

最后,规定了各邦国民之间互相混合的法律:必须使新加入联邦的新邦国民和原邦国民之间没有隔阂. [96]

自然,我不要读者把这种类比看得太认真.我提出这个类比,只希望通过这种较为熟悉的例子引起联想,这样固本原则表面的矫揉造作就消去了.

17

导致建立有理数域的种种考虑,是叫作数学算术化的历史过程的第一步.这个运动始于19世纪60年代的魏尔斯特拉斯(Weierstrass),其目的在将纯粹的数学概念,如数、对应和集合

等，和长久以来因数学与几何及力学的联系而产生的直觉观念，分离开来．

形式主义者认为，这些直觉观念在数学思想中实在是太根深蒂固了，所以纵使我们在选词上尽了最大的谨慎，这些词后面隐藏的意义还会影响我们的推理．这是因为人类的词都含有内容因而带来很多麻烦，而数学的目的却是要建立纯粹的思维形式．

但是如何才能避免使用人类的语言呢？答复是符号．只有用不曾为那些含糊观念如空间、时间、连续性等所侵占了的符号语言——这些含糊观念起源于直觉，常会妨碍纯粹的推理——我们才有希望把数学建筑在逻辑的稳固基石之上．

这就是这个学派的纲领．这学派的创始人是意大利的皮亚诺，而最现代的代表人物是伯特兰·罗素和怀特海（A.N.Whitehead）．后二人在他们的巨著《数学原理》（Principia Mathematica）中，曾经企图重建现代数学的整个基础，他们由明晰、基本的假定出发，并循严格的逻辑原理展开．用了精密的符号体系，就可使与人类语言不可分离的含糊性没有存身的余地．[97]

《原理》这部书将永远成为刻苦工作和卓越见地的纪念碑．其作者是否成功地建立起了一种完全依靠纯粹推理而不为人类直觉所侵染的结构呢？我没有能力回答这个问题．因为我还未曾碰到过任何一位数学家曾把那三大卷巨作全部拜读过．数学界流行的一段佳话说：世界上只有两个人曾将《原理》自始至终读完．究竟这两个人是否包括原作者在内，我也说不上．

18

我承认我个人对于皮亚诺——罗素学派的极端形式主义是不敢苟同的．我承认他们的符号逻辑方法一直没有引起我的兴趣．我承认我屡次努力想去把握他们的复杂的符号体系，其结果总是头昏脑胀以至于失望．这种个人的愚癖无疑地会沾染我的

意见——这也就是我不应该在这里表白我的偏见的重要原因.

不过我确信,这些偏见不会使我低估数学符号体系的作用.我个人的意见是,这种符号体系之所以非常重要,并非在于它所作的将直觉驱逐出人类思想的领域的希望不大的努力,而是在于它有无限的力量来协助直觉,创造出新的思维形式.

要明白这点,并不需要精通现代数学的复杂的技术性的符号体系.只要考察一种较为简单但也更加微妙的语言的符号体〔98〕系就够了.因为,就我们的语言能够表明精确的意思来说,也不过是一种符号系统,一种十足的文辞代数.名词和片语也只不过是各组物体的符号,动词象征关系,而文句无非是联结这些组的命题罢了.然而字一方面是某一组的抽象符号,同时它还能唤起一种形象——这一类事物的某个代表者的具体形象.我们应该在语言的这种二重作用里去寻找逻辑和直觉之间后来发生矛盾的萌芽.

一般的字如此,特殊的代表自然数的字也是如此.因为数字能够在我们头脑中有唤起具体集合的形象,在我们看来它们如此扎根于坚实的现实中,以至于被赋予了一种绝对的性质.可是用在算术上,它们的意义不过是一组服从某种运算法则系统的抽象符号罢了.

我们一旦认识了自然数的这种符号性本质,它的绝对品性即丧失了.它与以它为核心的推广域的内在血肉关系就十分明显了.与此同时,数概念的次第推广也就成了自然进化过程的不可避免的步骤,不再是乍看来那样的人为的和随意的魔术把戏了.

第6章 不可说

"上帝创造了整数,其余都是人类的作品."

——利奥波尔德·克隆尼克(Leopold Kronecker)

1

数统治了毕达哥拉斯派的宇宙.

这里所谓数,并非指这个字的现代意义:在这里占踞最高统治地位的是自然数,即正整数.但是毕达哥拉斯派的宇宙也不是我们的宇宙,我们的宇宙是超乎直接感觉的、通过现已构成我们日常生活的主要部分的各项发明呈现出来的、包罗万象的、甚至是不可思议的宇宙;而希腊人的宇宙则限于较能直接感觉到的事物.

毕达哥拉斯派在声音的和谐中,见到对他们的数的哲学的证明.视觉和触觉的和谐,则在完满的几何图形中得到至高的表现:圆和球,正多边形和完美的立体,都是造物主建造世界时所使用的元素.在这里,他们也满怀信心地期望,人们将发现数是最高统治者.

"点是位置的单位元素."这是毕达哥拉斯派几何的基础.在这句华丽的文辞背后,我们可以看出一种质朴的观念:线是由原子次第连接而成的,有如项链由一串珠子组成一样.原子也许非常之小,但都质地相同,大小一样,它们可以作为度量的最后单位.因此,取任意两个线段,它们的长度之比不过是各段所含的

[100]

原子数目之比而已.

任何三角形,特别是直角三角形的各边的情形自然也是如此.毕达哥拉斯派从埃及输入了"黄金"三角形,它的各边之比是3:4:5.不久又发现了其他的"毕达哥拉斯"三角形,诸如5:12:13和8:15:17等.这样,认为一切三角形都是有理的——这种信念看来越发查明有据了.固然有些三角形(实际上是大多数三角形)不能产生这般完美的比例,但这不足为奇;因为其比例可以延伸为很大的数,而希腊人的计算技术本来就是非常原始的.

这样,事情暂时停止不前.

2

对这种三角形的研究导出了一个重大的发现,这个发现至今还铭刻着毕达哥拉斯的名字,并且成为古典几何学的一条基本定理.这定理说:*在任意直角三角形中,两腰上所作的正方形之和等于弦上所作的正方形*.相传这定理是毕达哥拉斯亲自发现的,他对这定理的精美大为欣赏,特地以一头牛祭献神祇.不过,已经确实证实,毕达哥拉斯派是严格的素食主义者,这和本传说是否能够相容,且留待读者自行判别.

毕达哥拉斯是否是通过演绎推理推出这条定理,这是很可怀疑的.它很可能是一个经验的产物.同样,他也不像掌握了这个命题的严格证明.但是他和他的门徒极端重视这命题,这是毫无疑义的;因为*他们在这里看到几何和算术的固有联系*,这又证实了他们的格言:"数统治宇宙". [101]

但是,这个胜利是短命的.的确,这个定理的一个直接结果是另一个新发现:*正方形的对角线是不可用边来度量的*.究竟什么人首先建立这条定理以及它如何得出的,这大概是千古不破之谜了.以下的欧几里得的这个漂亮的证明,显然是从一种比较原始的方法发展起来的.但不论是谁发现的,它使毕达哥拉斯派诸人大为震惊则是毫无疑义的.给这类数量所取的名字就是最

好的证据.这种不可度量的数被叫作“阿洛贡”(Alogon),即不可说之意,而且他们立誓不泄漏此类数量存在的秘密.造物主的天工中出现了无法解释的破绽,此事自应绝对保守秘密,以免他因败露而把愤怒发泄到人类身上.

普罗克拉斯(Proclus)说:

“听说,首先泄漏无理数的秘密者们终于悉数覆舟丧命.因为对不可说的和无定形的必须保守秘密.凡揭露了或过问了这种生命的象征的人必定立遭毁灭,并万世受那永恒的波涛的摆布.”

3

时间过去不到一百年,毕达哥拉斯派的秘密已经成为一切有思想的人的共同财富.不可说的已经说出来了,不可思议的已经表以言词了,不可泄漏的已经呈显于凡人之前了.人类已经品尝了知识的禁果,而被逐出毕达哥拉斯数的乐园之外.

无理数的出现,标志着毕达哥拉斯主义作为一种自然哲学体系的衰落.毕达哥拉斯派所宣扬的算术的物和几何的物之间[102]的完满和谐原来是一个骗局:数对于宇宙的最直接方面——几何——尚且无法解释,它又如何能够统治宇宙呢?

这样,企图用数来穷尽天下万物的第一次努力便结束了.

4

欧几里得证明正方形的对角线不能用它的边来度量的证法和大多数的古典证法一样,属于归谬法类型.它只是表面是几何的,因为它实际建筑在纯数论的推究之上.用现代的术语来说,取正方形的各边为一,以 x 表对角线,毕达哥拉斯定理即归结为求解二次方程:

$$x^2 = 1^2 + 1^2, \text{即 } x^2 = 2. \qquad (1)$$

假设有一个有理数$\frac{p}{q}$能满足这个方程，那么正方形的对角线便可以用边来度量了.我们假设是这种情形，且设分数$\frac{p}{q}$是已约至最简的分数.这样p和q两个整数中，至少必须有一个是奇数.我先证明p不能是奇数.以$\frac{p}{q}$代(1)式中的x即得

$$\frac{p^2}{q^2}=2,\quad 即\ p^2=2q^2. \tag{2}$$

故p^2必然是偶数，即p必然是偶数.

p既然是偶数，设$p=2r$，此处r是另一个未知的整数.代入(2)式即得

$$4r^2=2q^2,\quad 即\ q^2=2r^2. \tag{3}$$

这和(2)式是同一类型.但是这就意味着整数q也是偶数，这和所设$\frac{p}{q}$为不复可约相矛盾，因而证得方程$x^2=2$不能有有理数根. [103]

这种证法具有完全的普遍性.略为修改即可适用于方程

$$x^2=3,\quad x^2=5,\quad x^2=6;$$
$$x^3=2,\quad x^3=3,\quad x^3=4.$$

或适用于更普遍的方程

$$x^n=a.$$

若a不是某有理数的整n次方，则方程$x^n=a$没有有理根.

5

在一些不甚重要的希腊几何学家诸如亚历山大利亚的希罗(Hero)和士麦拿(Smyrna)的西翁(Theon)等人的著作中，我们可以找到无理数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$等的近似值.如何求得这些数值的方法则未见提及.因为这些近似值多半都很精确，所以数学史家常常想入非非地要把这些未知的方法重新建立起来.这样的理论有许多.有的相信希腊数学家已经有无穷级数的知识；有的则以为

他们已有连分数的知识.我也自行杜撰一种说法,虽然也不免只是一种猜测,但是至少我还不曾假定希腊人已经通晓现代的算法①.

我的理论是:欧几里得对$\sqrt{2}$为无理数的证明,对普通的希腊数学家来说过于奇特而不能使他们信服.在毕达哥拉斯派中也许还有"死硬派",不肯放弃求出$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$等的有理值的希望.寻找这种有理值会循着最自然的路线进行.例如,2这个数,可以用无限个其分母为完全平方数的分数来表示:

[104]

$$\frac{2}{1}=\frac{8}{4}=\frac{18}{9}=\frac{32}{16}=\frac{50}{25}=\frac{72}{36}=\frac{128}{64}=\frac{200}{100}=\cdots.$$

若$\sqrt{2}$是一个有理数,则一直"往下进行"的结果,最后必定可以找到一个分子也是完全平方数的分数.在这点上他们自然失败了,但是作为一个副产品,而得出了一个很精确的近似值.的确,因为

$$\frac{288}{144}=2,$$

而

$$\frac{289}{144}=\left(\frac{17}{12}\right)^2,$$

这就是$\sqrt{2}$的西翁近似值,$1\frac{5}{12}$,它和真值相差不到七百分之一.

我提出这个理论而不管其价值如何.

6

几何中有各种各样的问题(其中有些问题的类型极为简单)不能作出数值的解答,或者说,至少不能在有理数域的范围内有解答.就取边长为一的正方形的对角线为例,凡学过用圆规和直尺作基本图形的儿童都会以几何法确定其对角线.其他可导致

① 参看附录17:无理数量的有理近似值.

二次、三次及高次方程甚至超越方程的问题，情况也是如此．而这类问题却完全不是有理算术力所能及的．

另一方面，无理量总可以用有理量来表示它的达到任何精确程度的近似值．上节所述的办法具有完全的普遍性．同样性质的办法尚有：中、小学所教的开平方算法；展开为级数法；连分数法；以及许多其他方法．这类方法在我们遇到没有有理解的问题时都可取来应用．这些方法能使无理数被“嵌”在两组有理数的序列之间，一组常“小”于该无理数，另一组则常“大”于该无理数．而且，这两组有理近似值之间的区间可以缩减到任意小． [105]

既能如此，我们还有什么奢求呢？物理学家、工程师以及一般讲实用的人都会心满意足了．物理学家对于计算方法的要求，是其精确程度只要能充分跟上他的量度器械的日益增长的精确性便够了．若干数量，如$\sqrt{2}$，π，e 等，虽然在数学上不能用有理数表示，但是这绝不会使他辗转不眠．只要数学供给他的有理近似值能达到他所需要的精确程度就行了．

7

数学家对于这个问题的态度却不同，理由是：他把有理数域看作一个整体，一个集合．他把这个集合看作由负无限大起，经过零，直到正无限大．这个集合是有序的：任意两个有理数，他都可以说出孰大孰小．在任意两个有理数之间，他总能插入第三个有理数，而不论那两个数原来是如何地接近．用一句行话说，有理域是处处稠密的．简言之，他把有理数的集合看作是一个紧密连续体，似乎其间没有空隙． [106]

在他看来，这个集合和直线上点的集合有着明显的相似之处．点的集合也是两端无限延伸的．点的集合中任取两点，也必可以定出孰左孰右．点的集合也具有紧密的性质；因为在任何两点之间都可以插入第三点，不论原有两点是如何地靠近．它们既看来是如此相似，那么，应该可以在有理数域和直线上的点之间

建立起一种对应.

这种对应就是解析几何学的基础,即使没有学过它的读者,也可以从偶尔作的图形中清楚了解其思想.所以这里我只提醒他们:这方法是在一根无限长直线上定出正负向.这种“有向”的直线名为轴.在轴上选定两点:一个是代表零的原点 O;一个是代表一的单位点 U.在右方以 OU 的长度次第量出的点表正整数,在左方同样量出的点表负整数.再将单位线段均分为整份,则一切正负分数也都可以表示了.

这样,一切有理数都能为轴上一点所表达;但是问题马上就出来了,反过来怎样呢?是否轴上一切的点都有一个有理数与之相对应呢?这个问题的回答是一个大大的不字.因为若以 OU 为边作正方形,而在轴上截取一线段 OD 等于正方形的对角线,我们知道绝不能有一个有理数对应于 D 点.

[107]

于是所谓没有空隙不过是一种错觉!若将一切有理数映射到轴上,我们固然得出一个紧密集合;但这个集合的点绝不能填满这根轴:轴上会剩下无限多的空隙不能这样表示.以后我们更会看到,在某种意义上说来,这种无理的空隙,其数目远远超过了有理点!

按纯粹数学家的观点,基本的事实是这样的:对于任何一个有理数,轴上都有一个对应点;但这种对应是不可逆的.轴上尚有非有理数所能代表的点:这种点不但为数无限,而且有无限多的种类,每一种类,例如$\sqrt{a}$,$\sqrt[3]{a}$,…,$\sqrt[n]{a}$等等,又各包含无限多个无理点.

8

因此,我们又面临推广数概念的工作了.我们必须把数域远远扩充到有理数的概念之外,因为有理数连解最简单的二次方程也不能完全胜任.

在推广的时候,自然又要重提以前屡建大功的固本原则了.

我们创造出符号$\sqrt[n]{a}$.若方程 $x^n = a$ 有一个有理根;即 a 是某有理数的完全 n 次方时,上述符号$\sqrt[n]{a}$代表一个有理数.以这种特殊情况作为出发点,我们建立起这类符号的运算法则.这些特征于是就用来定义一个新的数域,*初等无理数域*,即用符号$\sqrt[n]{a}$表示的方根的各种关系.利用把方根化为同次的方法,我们很容易建立等级的判别准则.例如要比较$\sqrt{2}$和$\sqrt[3]{3}$,我们得: [108]

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8};\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9};\ \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}.$$

因此得出不等式$\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

用同样的方法极易定义乘法和除法.任何两个有理数的方根之积也是属于同一类型的一个实体.例如,

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8 \times 9} = \sqrt[6]{72}.$$

然而在加法中我们遇着了不可克服的困难.像$\sqrt{2}+\sqrt{3}$这样的式子是不能用有理数的方根如$\sqrt[n]{a}$的形式来表示的.*两个初等无理数的和通常并不是一个初等无理数*.初等无理数域对于乘除法是"闭合的",但对于加减法却是"敞开"的.

要建立一个圆满的数制,我们好像不得不马上再把我们的初等无理数域推广成为*复合无理数域*,即$\sqrt[n]{a}+\sqrt[m]{b}$的类型.但在进行此种推广之前,让我们先粗略看一看摆在面前的究竟是一个什么问题.

9

不要忘了我们开始本想"解"最一般的方程

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + px + q = 0,$$

式中的 n 是任一整数,各系数都是有理数.我们上面所论的不过是这些最一般的方程中极为特殊的情形,即*二项式方程*,

$$ax^n + b = 0.$$

在 $n = 1$ 的情况下,我们回到有理数的范围.在一般场合下,则得出初等无理数.至于原来一般方程又如何呢?要是这方

[109] 程可以化成 $x^n = A$ 的简单型式，那么它的形式解便是初等无理数. 根本的问题是：任何代数方程是否都能归结成若干二项式方程呢？换句话说，是否一般代数方程的解都可在形式上用方根来表示呢？

这个问题的历史给我们提供了一个说明归纳推理的重要价值的极好的例子.

二次方程的特殊类型已见于丢番都的《数论》. 印度人进一步发展了这个理论，并从而建立了方根数的运算法则，它们的形式几乎和我们今天所学的一样. 最后完成这件工作的是阿拉伯数学家：他们得出一般二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的形式解为 $A + \sqrt{B}$ 的形式，也就是说，它能用有理数和二次方根来表达.

阿拉伯人又进而研究了一般的三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$，但很难说取得了什么成就. 莪默·伽亚谟给出了一个巧妙的几何解法，但在求形式的代数解失败之后，他断定三次方程不能用方根求解. 这个问题深深引起文艺复兴时期意大利数学家的兴趣，且在 16 世纪中被他们完全解决，其中情况我将在别处再谈. 他们得出：三次方程的一般解可以用三次方根和二次方根来表达①.

几乎同时，意大利人费腊里(Ferrari)把四次方程的解答归结到求辅助的二次和三次方程，从而证明四次方程可用四次以下的方根作出形式解.

自然会推论出这是一个普遍之理：根据前面这几个例子，n [110] 次方程式应该可以用方根求得形式解，很可能只用不高于 n 次的方根. 实在说，这确是 18 世纪中大多数数学家的普遍信念，只有拉格朗日是有名的持异议者之一.

这问题直到 19 世纪前期才告解决. 正如数学中所经常出现的一样，由于问题极度繁难，需要新的方法，而这些新方法反而

① 参看附录 14.

比原来的问题所要求的更有收获和更有影响.鲁菲尼(Ruffini)、阿贝尔(Abel)和伽罗瓦(Galois)的重大贡献,不但给问题以完整的解答,而且丰富了数学,给出了一个新的基本的概念:群.

10

最奇怪的是,阿贝尔和伽罗瓦两人的性格和外表如此相异,居然会对同一问题发生兴趣,而且用了相似的求解方法.二人都从五次方程入手,都相信用方根求解是可能的;当时阿贝尔年龄十八,伽罗瓦年龄十六.事实上,他们都曾经一度相信已经求得了解答;不久又都发现了他们的错误,并改用新方法来研究这个问题.

在1825年,阿贝尔最终地证明了:*一般五次方程不能只用根式来解*.他猜想一切五次以上的方程都是如此.这点由伽罗瓦明确地证明了."方程须有何种特殊性质,始可有方根的解答"这个问题,在伽罗瓦的遗嘱论文中得到了完满的回答.就是这个特殊问题,使伽罗瓦建立了一种新的方程式论,它通常被称为伽罗瓦群论.然而这问题已非本文范围所及了.

11

[111]

我们再言归正传.在无理数的问题中,固本原则之所以不能直接应用,其原因有两个:第一,初等无理数,即形为$\sqrt[n]{a}$的无理数,不能构成一个闭合的域.第二,复合无理数不足以解四次以上的一般方程.

要创立一种广泛的理论,我们必须考虑整个代数域,即包括了所有的代数数的一个域.所谓代数数,是一切可能的代数方程的解,这个数域当然包括有理域在内.而且可证明代数域不但对于基本四则运算是闭合的,对于开方也是闭合的;就是说,任意两个代数数的和、差、积、商、乘方、方根本身都是代数数.更进一层,如果我们考虑最一般的方程

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + px + q = 0,$$

这里，n 是一个整数，但 $a, b, c, \cdots, p, q$ 则不限于是有理数，它们本身可以是最一般形式的代数数；这样的方程没有解答则已，若有，*解答也是代数数*.

代数数的理论虽则宏富，但也有几个严重的缺点.第一，代数数所需用的符号体系含糊，而且不易运用，因为它涉及了方程的全部系数.再者，这类记号的运算太繁复了，使得即使是最简单的运算也几乎无法实行.最后，还有一个极严重的困难，即一[112] 次以上的代数方程一般都不止一个解.

二次方程可能有两个解，n 次方程可能有 n 个解.由此所产生的求解过程中所连带的模棱两可的性质实是一个难以克服的阻碍，特别应用到以单值性为中心的问题时，更是如此.

12

但是，远在遵循这个方向来推广数概念的运动大举推进之前，却发生了另外一个事件，其重要性使得连阿贝尔和伽罗瓦的发明也因之失去了光彩.1844 年，法国数学家，师范学院的雅克·柳维勒(Jacques Liouville)教授，重要的《数学杂志》(Journal des Mathématiques)的创办人，在巴黎学院宣读了一篇后来印行于该杂志的笔记，题为：《论既非代数无理数又不能化为代数无理数的广泛数类》.在这篇划时代的论文中，柳维勒宣布有一种依其本质不能为任何代数方程之根的数量，这就证实了早在 1794 年间勒让德尔(Legendre)已经宣布过的猜想.

代数数虽则看来很丰富，但是它们仍不过是一个更广大的领域中的一个部分.正如五十年之后，乔治·康托尔证实的：这个领域的幅员非常广阔.康托尔在给予柳维勒定理以新的证明时，给这种非代数数的所谓*超越数*的理论，奠定了稳固的基础.关于这点，且待以后再说.

更奇怪的是，这种超越数并不只是数学想象力的一种古怪

产品，或是刺激数学家的抽象胃口的一碟小菜.微积分的发明随之带来了一类量，它们在以后的几个世纪中，开始在一切分析问题上起着非常重要的实际作用：对数和三角比.到现在，这类数量已经是全世界每个工程师的办公室中每天都要使用的了，而且成为应用数学的最有力的工具.在柳维勒宣布他的笔记之后的五十年中，已经确实证明了这类数量的大多数都是超越数.为了很好地理解这类数，让我们先窥视一下数字 π 的历史. [113]

13

"他又铸一个铜海，周围是圆的，高五肘，径十肘，围三十肘."(《旧约·历代志》下，第四章，第二节.)

这种对所罗门神殿中祭司们的浴池的描写，看来表明了古代犹太人认为圆周和直径的比率 π 等于 3.这个数值比实际数值小 5%.埃及人有一个更精确的估计：我们在兰德古芦草纸(公元前 1700 年)上看到的 π 的数值是 $3\frac{13}{81}$，即$\frac{256}{81}$，也即是$\left(\frac{16}{9}\right)^2$，它超出实际数值不到 1%.

这个数量自然从很早以来就成了希腊数学家的研究对象.不过在希腊的土地上，这个问题有了新的性质.它出现在古代种种著名的问题之中，渲染着希腊神话的十足的传奇色彩.

这类名题有三：二倍立方体，三等分角，化圆为方.第三个问题实际就相当于求 π，因为半径为一个单位的圆的面积等于 π 个平方单位，若数字 π 能用有理数表出，整个问题即还原为作一个已知面积的正方形了.事实上，若埃及人的数值为真，则圆的面积就和在其直径的$\frac{8}{9}$上所作的正方形的面积相等了. [114]

希腊几何的大部分都是围绕着这三大问题发展起来的，在求解这三大问题的努力中，希腊几何学家发现了圆锥曲线和若干高次曲线.大概他们还不曾想到，他们所寻求的解答是不存在

的,而问题的艰难和执拗性,更激发了他们的努力,把从阿基米德到阿波罗尼这样伟大的天才们吸引到几何学的竞技场中.

14

头两个问题在代数上等价于解两个比较简单的三次方程:$x^3-2=0$,和 $4x^3-3x-a=0$,后一个方程中的 a 是个真分数.当我们把两个问题归于不可能问题时,所用"不可能"一词,其意义是否和在算术中一样,其中不可能相当于对数域加上了某一限制呢?

是的!这些古典问题的不可能,也是由于加了某种限制,这种限制是太久远了,以至大家视为当然,既为当然,便很少提及.希腊人说到几何作图,意指单用直尺和圆规的作图.这两种是神明所用的仪器;其他方法都被贬黜,不值得哲学家的思辨.我们不要忘记,希腊哲学本质上是贵族的.手艺人的方法虽则看来巧妙精工,但都被视作鄙陋下贱,凡是用知识谋求实利的人,通常都被鄙视.(相传有个贵族青年,进了欧几里得学院.几天之后,[115] 他很惊异所学的东西的抽象性,便问老师,他的思辨有什么实际用途.于是老师叫了一个奴隶并吩咐说:"给这个年轻人一个铜板吧!这样他就可算是从他的学问里得到些东西了.")

那些只用直尺便可解的问题,也就是今天所说的线性问题;若用代数的语言来说,导致一次方程.至于另一些要兼用圆规的问题,在代数上便相当于求解二次方程.然而这些事实在 17 世纪以前还不曾被人所知.在此时期,这两个问题同被许多天才和非天才所反复攻研.直到今天,还有若干专门的"三等分角家",他们的最大缺陷在于他们根本不知道在三百年前这问题即已经解决了.

直尺和圆规所能解的几何问题,若非一次的,就是二次的.这件事实并不意味着,如果一个问题引出了高次方程,就一定不能用此种方法来解.例如方程 $x^4-3x^2+2=0$.其左边可分解因

式得$(x^2-1)(x^2-2)$,故这个四次方程实际分解成两个二次式.假若可以作这种处理,就是说,可以将一个方程分解成次数较低的并且具有有理系数的表达式时,该方程便叫作可约的.

二倍立方体和三等分任意角所引出的三次方程,困难之点就在于它们是不可约的.这种不可约性便宣告了该两方程背后的问题不能用直尺和圆规来解①.

这里我们又得到了不可能一词的相对性的另一明证.不可能性几乎永远是某种限制所生的结果,这种限制通常都被传统 [116] 神圣化了,以致好像其本性就是如此.一旦除去限制,不可能性就消失了.这里也正是这种情况.我们今天已经知道用特种的连锁器(即含有一串有枢轴的刚体零件的画图器具),不但这两个问题可解,任何有有理系数的代数方程都是可解的②.

15

化圆为方的问题和其他两问题不同之处在于,它完全不能用代数公式来表达.

解答这个问题的尝试,自毕达哥拉斯以来数学史上累有记载.阿基米德是看出其困难在于定义的第一个人.因为在说到长方形、三角形的面积时,我们有很明确的定义.对于任何多边形也是如此.但是,所谓一根曲线之内的面积究竟是什么意义呢?我们固然能作出内接或外切的多边折线,从而说出所求面积的下限或上限.但是这面积本身则非引进无限算法和极限来定义不可.

以后我们可以见到,阿基米德就是在这个问题上试验所谓穷竭法的威力的.这里我们只需提及,阿基米德用一系列内接和

---

① 参看附录18:论三等分角.

② 参看附录15.

外切于圆的多边形,证得 π 的值介于 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 之间便够了.

在阿基米德之后的一千八百年中,这问题没有多大进展.当然,其间一直有很多的圆化方专家,而且印行了各种各样自以为是的解答,其中有的笑话百出.也出了许多 π 的近似值,其中最有趣的 $\sqrt{10}$,大概是发源于印度.这值和埃及人的近似值很接近,在中世纪时被广为采用.还有许多致力于改良阿基米德数值的记载.其中维叶塔可算有一定名气,他用了一个 393 216 边的多边形,求出了 π 的十位准确数值①.

[117]

无限算法的发明,其结果使计算大为精确,维叶塔的数值很快便失去了光辉.现在,已经知道 π 的七百位以上的准确数字.至于这种计算的实用价值,我们可引美国的天文学家西蒙·纽克姆(Simon Newcomb)的话:

> "十位小数就足以使地球周界准确到一英寸以内,三十位小数便能使整个可见宇宙的四周准确到连最强大的显微镜都不能分辨的一个量."

从理论的观点来说,这种劳绩或者可以说是显示了现代数学方法的日益精细.此外,还存着万一的希望,或许在连续的小数数字之间可以发现某种规律性,因而对数字 π 的本性能得到某种启示.

16

在 18 世纪末,这个问题进入一个崭新的阶段.兰伯特(Lambert)证明 π 不是一个有理数,勒让德尔作出了 π 不可能是有理系数的二次方程的根的证明.这便肯定地解决了化圆为方的问题,这当然丝毫不会减低圆化方专家们的狂热.因为这班人的特点正在于他们的无知和自欺.

---

① 参看附录 19:斯涅留斯近似法.

π 仍然有是一个代数数的可能.若果真如此,那么虽不能用圆规和直尺化圆为方,但至少形式上可用连锁器求解.这虽然没有什么实用价值,但二千年来的无望的努力也算有了一个适当的结局. [118]

1873年法国数学家夏尔·埃尔米特(Charles Hermite)证明 e 是一个超越数,从而大大减低了这种可能性.数字 e 和 π 有密切联系是众所周知的,因而大家加倍努力去证明,π 也是一个超越数.这工作终于在九年后为德国的林德曼(Lindemann)所完成.这样,自泰勒斯(Thales)时代以来,数学家为之绞尽脑汁的一个问题,便为近代分析学所解决了.

17

这样,便结束了企图用数来穷尽天下万物的第二次努力.

超越数的发现、超越数的范围和种类都比无理数丰富得多这一事实,以及超越数包括某些近代数学的最基本的量值,——凡此种种都确定地证明了:强有力的代数方法恰也失败在两千年前有理算术的简单工具所失败的地方.二者失败在同一个原因上:代数和有理算术一样,只处理有限算法.

古往今来,把数建立在比较稳固的基础上的希望,都被无限这块暗礁所触毁.但是,要正式认可无限算法,要承认这种奇特的无理怪物和有理数处于同等地位,对于19世纪的严格派来说,正如对于古希腊的严格派一样,都是一件使人讨厌的事.

在这些人当中,近代直觉主义的鼻祖克隆尼克是叫喊得最响的人.他径直地把麻烦归咎于无理数的引进,建议把它们驱逐出数学之外.他宣布了整数的绝对性,并坚持说,只有自然域以及可直接化为自然域的有理域,才是数学以之为根据的唯一稳固的基石. [119]

"上帝创造了整数,其余都是人类的作品."这将是使后代能

够最清楚地了解他的一句名言.这句话使我想起某位虔诚的老太太领导一个委员会来建立新教堂的故事.提出设计的建筑师发觉这位老太太处事极其认真.她反对得最激烈的是他的设计书上所要用的着色玻璃.最后,他没有办法,只得问她反对带颜色的玻璃有何理由,她斩钉截铁地回答:“我要我们的玻璃是上帝所造的那个样子!”

第7章 流性的世界

[120]

"我们对于大自然和物质的最初的朴素印象，是连续性的印象.不论是一块金属或者一定体积的液体，我们都把它看成是可以无限地分割的；不论是如何小的一部分，在我们看来都具有和整体同样的性质."

——大卫·希尔伯特

1

在数学上，条条大路都回到希腊.

在这里我打算略述一下无穷小这个观念的演变过程.这个概念的成熟，地点在西欧，时间是17，18两世纪；但当我推究这一观念的起源时，却发现了另一个地方和另一个时代：这一幕得退回到古代希腊，退回到值得纪念的柏拉图时代.

无限的问题跟和它密切相关的无理数问题一样，都出于希腊之土.也是在那里，它出现了第一次危机；自此以后，危机便接踵而至.第一次危机出现在柏拉图时代，然而它并不是柏拉图制造的.其他正统希腊哲学家也不是这个争论的发起人.这是另一派思想家所促成的，这派人被那个时代居于主要地位的哲学家们贬称为"诡辩家".

正统思想家们给这班无名之辈的另一称号是"埃利亚派"，意思大概是说，他们所传授的教义，正和他们的主要代表人物巴门尼德(Parmenides)和芝诺的故乡一样地荒僻和无足轻重.因为 [121]

埃利亚(Elea)是希腊在南意大利的一块贫瘠的殖民地;拉尔梯乌斯(Laërtius)①说:"除了知道如何教养有德行的百姓以外,它毫不足道."然而,我们现在回顾起来,诡辩家们似乎是唯一使它出名的特产.

2

罗素说:"这种形式或那种形式的埃利亚的芝诺论证,引起了几乎整个关于时间、空间和无限的理论,这些理论从他那时起到今天,一直在被人们发展着."然而我们现在还不知道他的这些论证到底是在辩论中提出的呢,还是用书的形式提出的?也许两种形式都有吧!因为我们在柏拉图的对话篇《巴门尼德》(这是我们现在所有的关于这个晦涩题目的稀少史料文献之一)中,可以读到芝诺侍随着他的师傅巴门尼德作雅典之行的事.对话中提到以前的一次雅典之行,当时,芝诺大概提出了他的论证.而在被问及这些事时,芝诺回答道:

> "对于吾师的热诚之心,使我在少年时作成此书,可是原稿被人偷去了;因此,是否将其付诸公布,我无法作主;把它写下的动机并不是一个老年人的野心,而是青年人的锐气."

也许就是这样的吧,我们已只能从亚里士多德的著作中了解这些论证了.谁知道亚里士多德能否有毫不曲解一位已故的论敌的雅量呢?

这些论证用现代语言表述出来非常困难.并不是缺乏译本——恰恰相反:我们被汗牛充栋的译本所苦恼.有数十种译本

---

① 第奥根·拉尔梯乌斯,约为公元前3世纪人,编有《关于著名哲学家的生活、见解和名言》一书,广博记载了古代希腊哲学家的材料.他的书中将古希腊哲学家分为伊奥尼亚和意大利两个学派,并将苏格拉底划归前一派,埃利亚派划在后一派.——译者

和成百种意译，若以注释而言，即使圣经上的晦涩章节之受人重视也不过如此．每一种译本反映出它的译者所偏爱的理论，几乎 [122] 有多少译者便有多少理论．

3

亚里士多德在他的《物理学》(Physica)里所记芝诺的论证如下：

第一论：二分法：

“第一论是论运动的不存在．所持论据是，运动体必先达到中点然后才能够到达终点．”

第二论：阿基里斯和龟：

“第二论是论所谓阿基里斯．其内容是，在赛跑的赛程中，慢者永不会被快者追上，因为追者必先到达被追者刚刚离开之点，从而慢者总是或多或少在其前面．”

第三论：箭：

“如果一物处于始终如一的状态之中，它要末保持持续的运动，要末保持持续的静止，可是运动着的东西总是处于此时此刻的状态中，所以运动的箭是不动的．”

第四论：运动场：

“第四论涉及两排东西，每排都由数目相同、体积相等的物体所组成，此两排在一跑道中相对运动，他们前进的速度相等而方向相反；有一排原居于跑道的中点和终点之间，另一排位于中点和始点之间．他认为这种情形包含着如下结论：一给定时间之半等于该时间的两倍．”

4

在倾向于形而上学的人看来，这四论是对运动的实在性的一种驳斥．别的人，如历史学家坦纳里(Tannery)，则说芝诺并无 [123] 此意，相反的，他是利用无可辩驳的运动的真实性，来指出我们

的空间、时间、连续性等意念中所含有的严重的矛盾. 和这个观点很相近的是昂利·柏格森(Henri Bergson)的意见,他以为"埃利亚派所指出的矛盾,与其说是与运动的自身有关,不如说是与我们头脑中所虚构的运动有关."

从后一观点看来,这四论的价值,恰恰在于这个事实:它们有力地显示了数学在人类知识的普遍结构式中所占的地位. 四论证明了我们的感官(或感官的现代延伸,科学仪器)所感知的时间、空间、运动等,与具有相同名字的数学概念并不具有共同的外延. 芝诺所提出的困难,并非要使纯数学家感到吃惊——并非揭示了什么逻辑上的矛盾,而只是揭示了语言的十足含糊性. 数学家只要承认他所创造的符号世界不等于他所感觉的世界,那他就可以处理这些含糊性了.

因而,所说的直线的性质是几何学家自己造出来的. 他有意地忽略直线的厚度和宽度,有意地假定这样的两条直线的公共部分(即交点),是无度可言的. 因为他很想将算术规律应用于这些几何实体之上,如我们所将看到的,他就承认了无限算法的确实性,而线段的无限可分性即希腊人的二分法,不过是其中一个特例而已. 古典几何就是这些假定的逻辑结果,但是这些假定本身却是任意的,最多也不过是一种方便的虚构罢了. 数学家满可以取消古典公设的一部或全部,而代以一组新的假定体系. 譬[124]如,他可以采取带子和两带所共有的面积为新的元素而名之曰直线和点,从而创造出一种几何,它完全和古典的学说不同,但是却能一样的自圆其说,或者能同样地富有成果.

可是对于实用家,对于物理学家和工程师,却不是所有这样的体系都是同样地可以接受的. 实用家要求至少在外表上要具有实在性. 他总是要和具体的东西打交道,数学的术语在他看来不是记号或思想,而是实在的形象. 一种体系由于它内在的一致性而为数学家所接受,但在实用家看来也许却因为它以不完全的方式表示实在而认为是充满"矛盾"的.

尽管看来很奇怪,实用家应当对这四论特别关注,因为它们非难了数学在物理现实上应用的有效性.然而,可喜的是,实用家却很少对此感到兴趣.

5

这四论在历史上的重要性,是怎样估计也不为过分的.其理由之一是:它们促使希腊人对时间的概念采取了新的态度.

芝诺在其第一论中所说的实质上是这样一个论证:一个赛跑者在到达终点以前,必须先达到跑程的中点,要跑这段路程需要一段有限的时间,而他要跑至剩下的距离的中点,又需要一段有限的时间.上面说的这种情况可以永远重复.在他的跑程中就有了无限个阶段,而每一阶段都需要一个有限的时间.但无限个有限时间的和是无限的.所以赛跑者就永远达不到他的目的地.

亚里士多德是这样处理这个推论的:

> "时间和空间都分成同样数目的相等部分.所以芝诺的第一论中所说:在有限的时间内要一一通过或一一触及一无限集合中的对象是不可能的——是错误的.因为,对于长度和时间(实际对于一切连续的东西),'无限'这个词含有两种意义:一方面是关于可分性,另一方面是指数目.在有限时间内要接触无限数目的物是不可能的,但接触无限可分性的物则是可能的;因为在这种意义上,时间本身也是无限的." [125]

这样,头两论(因为第二论只是第一论的巧妙变形)的真正的结果就是,要假定空间的二分法就必须同时承认时间的二分法.然而这正是难以捉摸之处!因为线段的可分性是容易理解的:我们很可截断一竿或分割一线来使它具体化.可是"区划时间"却不过是一句比拟而已:时间是一件我们不能作实验的东西:它或是整个属于过去或是整个属于将来.将时间分成各段,对于希腊人只是一种心理的行为,对于我们也同样是一种心理

的行为.

将无限可分这一特性赋予时间，相当于以几何直线代表时间，相当于把持续性等同于广延性. 这是力学几何化的第一步. 这样芝诺的第一论直接指向现代相对论的四度世界所根据的原则①.

6

四论中的真正要害存在于末两论；芝诺似乎预见到了他的论敌的对抗，事先准备好了对策. 第四论包含着相对论问题的萌[126]芽，我们这里不去讨论它. 有力地揭示了我们感官所感觉的运动和数学想象中所称的运动二者之间的差距的，是第三论.

我们且听芝诺的反驳：

> “你是说正如空间为无限个连接点所构成，所以时间也不过是连续的瞬息的无限集合吗？好！那么就看一支飞着的箭吧. 在每一瞬息，箭的末端都占着路程上的一定点. 现在，当它占据了这位置，它就必然在这里停住. 然而一点怎能既停住而又同时运动呢？”

数学家的处理是一道命令：何谓运动？运动岂不就是位置与时间的一种对应么. 他称变量之间的这样的对应为函数. 运动的定律就正是一个函数，它实在是一切连续函数的典型. 在本质上它和下面的例子实在是没有什么差异的：一个圆筒盛满了气体，内有一活塞可以在筒中自由滑动. 活塞在任一可能位置时，筒内皆有一个固定的压力与之相应. 如要得出相应于某位置的气压，只要将活塞停止于该处，从气压表上读出数来就行了.

然而这和一个运动着的物体是一样的吗？我们能够使其停在某一瞬息而不截短我们正在观察的运动吗？当然不能！那么所谓运动物体在某一时刻占据某位置又作何解释呢？我们的意

① 参看附录 20：论时间的本性.

思是:虽然我们无法想出一个实际的步骤来止住一支飞行着的箭而不破坏其飞行,可是这不妨碍我们通过心理的行动来这样作.但在这种心理行动背后的唯一实在性就是,可以想象另一支箭,在这一瞬间静止于这一点.

数学上的运动只是静止状态的无限连续罢了,就是说,数学将动力学还原为静力学的一个分支.完成这种转化的原理首先 [127] 是由达兰贝尔(d'Alembert)在18世纪系统表述出来的.把运动等同于一系列连续的静止状态,在这个过程中运动的物体保持平衡,这表面上看来似乎是荒谬的.然而说运动是由静止状态所构成,和说长度是由无广延性的点所构成,或时间是由无持续性的瞬息所构成,其荒谬程度并不多些或少些.

真的,这种抽象法,对于我们感官所感觉的真实运动来说,连个骨架也说不上!我们看见一个飞动的皮球时,我们感知的运动是一个整体,而不是一系列无限小的跳跃.然而数学直线也不是一根金属线的真实的、甚至也不是合理的代表者.人类被训练应用这种假想已经如此之久,以致宁用代替物而不用实物了.

7

此后的希腊科学的进程清楚地表明了,在希腊的数学思想上,芝诺论证所突然带来的危机,产生了多么大的影响.

一方面,这一危机引进了一个诡辩的时代.它是毕达哥拉斯派的素朴词章的自然反应,这派人把数学的观念和宗教的口号以及含糊的形而上学思辨作成一种奇特的混合物.与此相反的,是欧几里得的《几何原理》的极端严格性,直到今天,它还被当作数学学科的典范呢!

另一方面,四论把无限之恐怖灌输到希腊几何学家的头脑中,以致于部分地麻痹了他们的创造性的想象力.无限成为一种禁忌,不惜任何代价,务必拒之门外;如果作不到的话,就必须用

归谬法之类的推理把它伪装起来.在这种情况下,不但要建设一[128]个明晰的无限理论是不可能的,即使在柏拉图以前已发展到很高的阶段的无限算法,也几乎完全停顿了.

在古希腊,我们看到各种最优越的条件的汇聚:第一流天才辈出,欧多克斯(Eudoxus),阿利斯塔克(Aristarchus),欧几里得,阿基米德,阿波罗尼,丢番都,帕普斯等,既有鼓舞创造能力和钻研思想的传统,又进一步发扬了一种批判精神,以防研究者落入幻想野心的陷坑;最后,还有一种最适合于有闲阶级的发展的社会结构,不断产生大量的思想家,他们可以专心致力于思想的追求,而无需顾及当前实利——这种环境的聚合,即使在我们今天也是难以超过的.然而希腊的数学,虽有丢番都也未能建立一个代数,虽有阿波罗尼也未能建立一个解析几何,虽有阿基米德也未能产生一个无限小分析.我们已经指出:因为缺乏一种带记号的符号体系,阻碍了希腊数学的发展,然而无限之恐怖也造成了同样的阻力.

8

在穷竭法里,阿基米德实已掌握了无限小分析的全部要素.因为近代分析学不外是无限算法的理论,而无限算法实基于极限的观念.这个观念的明晰的系统表述,我留到下章再谈.这里只需指出,阿基米德具有的极限观念足以发展出牛顿和莱布尼茨的微积分,而且这个观念一直到魏尔斯特拉斯和康托尔的时代几乎没有很多变化.的确,极限的运算所根据的概念不外乎是:若两个变量的差可以使其为任意小,则这两个变量趋于相[129]等.正是这个观念也构成穷竭法的基础.

同时,此原理还提供了一个实际求极限的方法.此法是将变量"嵌在"其他二变量之间,正如夹在老虎钳的钳嘴间一样.就以曾经提过的圆周问题来说,阿基米德将圆周夹在两组正多边形之间,一组外切,一组内接,其边数都不断增加.上面已经说过,

用这个方法,阿基米德证明了 π 的数值介于 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 之间.他又用这个方法,求得抛物线所围的面积等于同底同高的矩形面积的三分之二——这个问题实则是我们现代积分法的先驱①.

是的,最公平地说,阿基米德应该算是无限小分析的创始者.穷竭法之所以不能成为 18 世纪的积分学,只是因为缺少一个适当的符号体系以及对无限的肯定的——或者可以说是素朴的——态度.可惜的是,没有希腊人继续阿基米德的足迹前进,使得这位大师所发现的富饶疆域要留待另一时代来开发.

9

在昏睡了一千年之后,欧洲的思想摆脱了耶稣教神父精巧地施加的催眠剂的影响,无限问题就是最先复活的一个.

然而这次复活的特点是完全缺乏希腊人的批判的严格性,尽管文艺复兴时期的数学几乎完全溯源于希腊.开普勒(Kepler)和卡瓦列利(Cavalieri)首创的快捷而粗制的方法,只在表面 [130] 上稍加改良,便为牛顿和莱布尼茨所沿用,发明无限大的记号的华利斯(Wallis)、伯努利(Bernoulli)四兄弟、欧拉和达兰贝尔也都如此沿用.

他们依其论证的需要随便将无限小当作常量或变量来处理;他们操纵无限序列,既无章法,又乏理由;他们用极限来变戏法;他们处理发散级数时就好像它也适用于收敛级数的一切规律.他们含糊地规定其术语;不严谨地应用其方法;而且论证中所用的逻辑只不过迎合于自己的直觉.一句话,他们破坏了一切严格的规律,破坏了数学的体统.

无限小——他们当时称之为不可分(Indivisibilia)——被采用之后所引起的真正的狂欢,实在是一种自然的反应.在希腊的

① 参看附录 21:化一段抛物线为矩形.

极端的严谨性下，直觉已被囚禁得太久了.现在它挣脱了束缚，再也没有欧几里得们来限制它的自由浪漫的飞翔了.

还有另一个不可忽视的原因.我们不要忘记，当时的杰出人物们都要接受经院教义的训诲."我们只消把一个孩子教养到八岁，"一位耶稣教士说，"他的将来只能听从命运."开普勒想作一个牧师的希望遭到挫折之后，很不情愿地去从事天文学.巴斯伽抛弃了数学去作宗教的隐士.笛卡儿由于对教权的信仰而减低了他对伽利略(Galileo)的同情.牛顿在写他的杰作之余，却又写了许多神学的劝世文.莱布尼茨梦想着可以使基督教在这个世界上太平无事的数的图式.对于那些其逻辑来自对"圣典"，"赎罪"，"三位一体"和"化体"等的思辨的人来说，无限算法的有效与否，的确只是一件无关紧要的小事.

[131]

10

这里讲的可算是对贝克莱(Berkeley)主教的一个为时已晚的反驳.在牛顿的划时代的微积分著作发表二十五年之后，主教著一论文，题为：《分析者；对不信教的数学家的谈话》.对于认为对宗教信仰太过分的论点，主教反驳说，数学的前提也并不更加可靠.他用不可比拟的才能和智慧，对无限小学说加以深入的分析，揭露出许多不严格的推理、含糊的陈述和触目的矛盾."流率"(fluxion)和"微差"(difference)即其中的两个这样的术语；为反对这两个术语，主教用了他那卓著的爱尔兰幽默语调讽刺说："一个能够消化第二、第三流率和第二、第三微差的人，据我看来，他无需对于神学上的任何观点感到肠胃不调."

牛顿的"流率"，莱布尼茨的"微差"，现在我们称之为微商和微分.它们是一种数学学科上的主要概念，加上解析几何，它们构成了促进应用科学发展的强有力的因素：这就是微积分.解析几何的创立应归功于笛卡儿；至于牛顿和莱布尼茨二人谁首先发明了微积分，整个18世纪都在激烈地争论着，即使在今天也

还没有完全弄清楚.但这两个学科的原理,我们发现在费尔马于1636年10月22日给罗伯瓦尔(Roberval)的信中,已经明确地预示出了,这是在笛卡儿《几何学》(Geometria)问世的前一年,也是牛顿的《原理》(Principia)刊行的前六十八年.如果费尔马没有那种不爱发表研究成果的怪脾气,则解析几何和微积分的创立都应归功于这位文艺复兴时期的阿基米德了,而数学界也可以免受长达一个世纪的不愉快的纷争之羞辱了. [132]

11

牛顿的微积分原理的实质可用运动的例子来说明,碰巧的是,运动也正是微积分第一个得以应用的问题.设有一质点沿一直线运动.如果在相等的时间内,通过了相等的空间,即说这质点在作等速运动;而在单位时间,例如一秒,所通过的距离,叫作该等速运动的*速度*.现在,若是在相等的时间内所经过的距离不等,就是说若运动为*非等速*,那么刚才所说的速度一词,就根本失掉其意义了.但是我们可以用所用的时间来除所经过的那段距离,此比称为质点在该距离内的*平均*速度.这个比即牛顿所谓的*本初比*(Prime ratio).这个数显然与我们所考虑的那段时间长短有关.现在注意,这段时间越短,则平均速度越逼近某个一定值……这样得到一个*序列*,其中两邻项之差越来越小,到某个时候,两相邻之项便无法分辨了.现在我们想象(此种观念同时也为我们对时间和空间的连续性的直觉意念所证实),继续无限地缩短时间间隔,于是,序列的最终项(牛顿的*最终比*),照牛顿的说法,就代表了*在这段时间内的最初点上的速度*.

今天我们说:*依定义*,一个运动点在某个时刻的速度,就是其平均速度当此段时间无穷减少时的极限值.在牛顿的时代,他们是没有这样谨慎的. [133]

最终的比,牛顿又叫它*流率*.流率就是一个变量,如长度,面积,体积,压力等的变化率.后者牛顿名之*流质*(fluents).可惜这

些富于表现力的字现在都废而不用了，而代以一些冷漠的字眼如微商，函数等.因为在拉丁文里，fluere 这个字是“流”的意思，fluent 是“流动物”，fluxion 则是“流动率”.

12

牛顿的理论一面论的是连续量，一面又假设了时间和空间的无限可分性；他说的是一种流，而论这个流时又把它当作一系列微小的跳跃.因为这点，流率理论遭到各种反对，这些反对也就是二千年前芝诺所提出过的.而自古以来，那种认为数学必须与人类感官的天然实在相一致的“实在论者”，和坚持实在必须与人类头脑的号令相一致的“观念论者”二者之间的宿仇又要出现了.这事只等待一位芝诺的出现，但这次的芝诺却是以一位圣公会牧师的陌生姿态出现的.但是且让我们看一看后来成为克洛因(Cloyne)主教的乔治·贝克莱是怎么说的吧：

[134]

> “正如我们的‘感觉’在分辨极微之物时会变得疲劳和迷惑一样，‘想象’(它是感官的官能从‘感觉’而产生的)在构成对时间的最小质点或由此质点产生的最小增量等的观念时就更会模糊不清；它要理解瞬间和这些流性数量在新生状态时的增量，也即是它们在变成有限的质点之前刚刚开始存在的增量就越发困惑.看来，尤其困难的是设想这种新生状态的不完全实体的抽象速度.至于速度的速度——第二，第三，第四和第五等等级的速度——如果我没有说错，那都是非人类理解力所能及的了.人们的头脑愈是深入地分析和追求这种飘忽不定的观念，就愈会感到茫无头绪；这些客体，开头是飞逝的，微小的，很快就消失不见了.无论在何种意义上说，什么二级，三级的流率肯定都是一种神秘之物.一个开始瞬间的开始瞬间，一个新生增量的新生增量，也就是说，属于还谈不上数量的东西——不管你从哪种意义上来解释，要得出这样东西的一个清晰的概念，如果我

没有错,一定是不可能的.……

"这种流率法的伟大作者也感到了这个困难,所以他不得不乞灵于那些精致的抽象物和几何上的形而上学,没有它们,他对于这些被公认的原理便会一筹莫展.……须知他用流率只是像建筑时的临时支架,一种一旦按其比例找出限定的外形之后就被弃置不用的东西,可是这种限定的模型又是由流率而来的……这些流率又是什么呢?是瞬息即逝的增量的速度.然而这些瞬息增量又是什么呢?既不是有限的量,又不是无限小的量,也不是无.我们能不能把它们叫作死去数量的鬼魂呢?……

"为使你可以更明晰地了解上述论述的意义和意图,使你可以继续你的沉思,我再补充以下面的质疑……

"质疑六十四:对于宗教问题是那么明辨的数学家们是否也能严格对待他们自己的科学呢?他们是否不敬奉权威,单凭藉信仰,相信不可捉摸之物呢?他们是否没有他们自己的神秘,或者更进一步地说,没有他们自己的龃龉和矛盾呢?"

13

那么,贝克莱的机智结论带来了什么实际的结果呢?是的,他在攻击数学术语的不恰当和不相容之点上是大有功绩的.此[135]后数十年间产生了巨大的变化:如本初,最终,新生状态,开始,流质,流率等字眼都舍而不用了.不可分变成现在的无限小;而无限小只不过是一个趋于极限零的变量而已.整个问题都徐缓而稳步地为极限这个中心观念所主宰了.

如果贝克莱主教在他写《分析者》后五十年再复活过来,他将为他所责备的那个顽童已经变得如此小心谨慎而无法辨认了.然而,他会感到满意吗?不会的!主教以其锐利的目光,仍然会辨认出改变了斑点的原来那匹豹子.他所攻击的不仅是语

言上欠缺明晰性(虽则这点在他的批评中受到了应有的指摘),而是芝诺所曾指出的:新的方法不能满足我们那种不间断的、不可分的、无所谓各个部分的关于连续的直觉观念,因为任何想把这种连续分成各个部分的企图,其结果都将破坏所要分析的真正性质.

如果我们再继续幻想下去,幻想主教阁下又在我们当中钻了出来,我们会听见他仍旧提出同样的攻击,发出同样的指责.然而这次他会又惊又喜了,因为他将在敌派的营垒中发现了一大群人,他们不但捍卫他,而且将欢呼他为先驱者.

但是,关于这点我们后面再谈.

14

这期间,分析学成长复又成长,不顾批评家们的警告,不断勇往直前,征服着新的领域.首先是几何与力学,其次是光学和[136] 声学,热之传播与热力学,电学和磁学,最后甚至于混沌的宇宙也直接受其统治了.

拉普拉斯说得好:

> "我们可以把宇宙的现状看作是过去的结果和未来的原因.一个在任一给定瞬间都知道那驱动自然的一切力量和构成这种力量的生灵的相互位置的智者,只要他伟大到足能将所有数据加以分析,他就能够将宇宙间最庞大的物体的运动以及最轻微的原子的运动都凝聚成一个单一的公式;对于这样一位智者来说,没有什么是不确定的,因为将来,甚至像过去一样,永远展现在他的眼前."

然而这种伟大的结构乃是前数世纪的数学家所创造的,他们对于其所立足的基础,却并不怎么注意.尽管它有那么多的不严谨的推理,那么多含糊不清的观念,有那么任意的推广,可是竟也没有闯出什么大不了的错误,这不是十分令人惊奇的事吗?"勇往直前吧,信仰会跟随你们!"这是达兰贝尔策励怀疑者的

话.似乎是听了他的鼓励之词,在对无限算法有效性的盲目信仰的引导下,他们果然勇往直前.

接着就到了批判的时期:阿贝尔和雅科比、高斯、柯西(Cauchy)和魏尔斯特拉斯,最后还有狄德金(Dedekind)和康托尔,将整个结构作了透彻的分析,消除其含糊性.这样的重新改造的真正结果是什么呢?答曰:它谴责了先驱者的逻辑,而拥护了他们的信仰.

15

无限算法在工艺实用上的紧迫需要,其重要性是怎么估计也不会过分的.实际上,算术在几何学、力学、物理学以至统计学 [137] 上的一切应用,几乎都直接或间接地涉及这些算法.在间接方面是因为这些科学对于无理数和超越数的广泛应用;在直接方面则是因为,若没有这些算法,则这些科学所使用的最基本的概念,就不能得到明晰的定义.除去无限算法,则纯粹的和应用的数学,都将退回到毕达哥拉斯以前所知道的状态.

我们对于曲线弧长的观念可以作为例子.

味着一场真正的革命,因为这些概念在我们的心中已经如此地根深蒂固了;要不然我们就必须把这些理性的观念运用到一个既不平、又不直、也不均匀的世界中去.

[138] 但是如何才能将平、直、均匀运用到与它恰恰相反的歪斜、弯曲、不均匀上面去呢? 当然不能通过有限步实现.奇迹只能靠创造奇迹者——无限——来实现.既已决心要坚持基本的理性的观念,则除了把我们感官所感知的"弯曲"实在,看作是只在我们想象中存在的平直世界的无限步的最后一步外,是别无他法了.

奇就奇在这竟能奏效.

第8章 演变之道

[139]

"我们来计算,不需要更多的假定;但要我们能够计算,就必须先行作出假定."

——尼采(Nietzsche)

1

现在回到无理数,我将力图指明这个问题和前章所讨论的连续性问题之间的密切关系.不过,首先让我们回到我们讨论连续性问题之前的情况.

企图将有理算术应用于几何问题,其结果便出现了数学史上的第一次危机.两个相当简单的问题,确定正方形的对角线和圆周,揭示出数学上一种新实体的存在;此种实体在有理域中是没有立足之地的.人们于是便深感到有理算术的不够用了.

进一步的分析表明,代数的方法一般说来也同样地不够用.因而,数域的扩充显然是不可避免的了.怎么扩充呢?无限多个无理数,更正确地说是无限多个种类的无限多个无理数,如何才能挤进有理数集合的编织严密的结构中去呢?

我们必须完全改变我们的数的旧概念——这是无疑的.旧概念既然在几何的领域中失败了,因此我们必需在几何上为新概念寻找出一个模型来.连续而无限长的直线,用来作这个模型似乎很合乎理想.不过在这里我们又遇见了一个新的困难:如果我们的数域与直线相一致,则对每个个别的数,就必有相应的一

[140]

个点.然而,点是什么呢?对于作为直线的元素的点,我们即使不能有一个定义,至少也得有一个清晰的观念才行.

2

把点当作一种无度可言的几何学上的存在,这个一般观念当然是一种假想;但当我们分析这种假想时,我们发现它的背后有三种清晰的观念.第一,我们设想点是一种生成性的元素,它在运动中描画出一条直线.这种观念看来十分适合我们直觉上的连续性观念,而连续性就是我们赋予直线的第一个特性.不过如果我们取这种动态概念作为直线和数域类比的基础,则此二者实有不相融之处.

确实,我们感官所感觉的运动乃是某种个别的,不可分割的和无间断的东西.将运动分解为各个元素,其结果适足以破坏我们决心保持的连续性.但为了与数类比的目的,直线必需看作是无限小的静止位置的次第相续,这恰恰与我们所想象的与静止完全相反的那种运动的观念相冲突.这就是芝诺论证的振振有词的理由.

我们已经看到数学家如何试图用无限小分析的发明来作这种矛盾之间的桥梁;我们又看到这种分析如何由几何和力学出发,终于得在精密科学的各个方面获得统治的地位,最后还成为变化论这种道地的数学理论.从实用的观点说,分析学的这种全[141]面胜利,足以证明其方法的有效性.但是,要知梨的好坏必须吃梨,这话固然不错,但吃并不能告诉我们梨是什么,分析学的成功本身只是突出了那个老问题:连续统是由什么构成的?

第二,点可以当作两根直线的相交处,就是说,另一直线在所讨论的直线上留下的痕迹.这样,它只不过是一个分划,也就是将这根直线分隔成互斥互补的两个部分.理查德·狄德金就是以这个观念作为出发点而写出了他的划时代的论文:《连续性与无理数》.这篇文章发表于1872年.关于这些,下章再说.

最后,点可以视作对一条线段施行无限算法时所得的极限位置.这样的方法可能有种种样式;在这里我们只需指出,其中最有代表性的一种,就是希腊人的二分法.这种无限算法在算术方面的相应东西就是无限序列.康托尔就是用有理无限序列来作他的著名的无理数理论的媒介物.这篇论文于1884年首次问世.这个简单而又影响深远的观念,也就是本章的论题.

3

一个序列的各项如果都是有理数,则该序列称为有理序列;若其中每项均有一后继项,则它称为无限序列.用以产生出无限序列的一组运算,我称之为无限算法.

所有无限算法的原型就是重复.实在说,无限这个概念本身就是从下述概念引出来的:凡说过或做过一遍的东西可以永远重复.将重复应用于有理数 a,我们就得到重复序列 [142]

$$a, a, a, a, \cdots,$$

我将称该序列代表数 a.

另一种基本运算,我将称之为级数法,这是一种连续的加法.设有序列

$$a, b, c, d, e, f, g, \cdots,$$

运用级数法就生出一个新序列

$$a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, \cdots,$$

我们称之为序列 $a, b, c, \cdots$ 所产生出的级数.所以,从重复序列 $1, 1, 1, \cdots$,就可得出自然序列 $1, 2, 3, 4, \cdots$.

级数法显然可以应用于一切序列.因此,每个序列必有其相应的级数.不过其中最重要的乃是渐逝序列所产生的级数.所谓渐逝序列,其特征在于相继各项渐次减小,以至于可以"走到"足够远的地方,而得到小于任意给定数的项.这种类型的序列有:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots;$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots.$$

4

取任意两个序列,若将两者的项一一相减,又可得出另一序列.这样引出的*差序列*也可能是渐逝的,例如下两序列:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\cdots$$

和

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\cdots$$

[143] 便是这样的.这里各相应项之差组成一序列:

$$\frac{3}{1\times2},\frac{5}{2\times3},\frac{7}{3\times4},\frac{9}{4\times5},\frac{11}{5\times6},\frac{13}{6\times7},\frac{15}{7\times8},\cdots,$$

每项的分母都是两个相连数字之积,而分子则是该两数之和.这个序列的第一千项小于0.002,其第一百万项小于0.000 002.由此类推,本序列必为渐逝.

两序列的差序列若为渐逝,则我称此二者为*渐近的*.两渐近序列之一,也可能是重复序列,例如

$$1,1,1,1,\cdots;$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots.$$

该重复序列代表有理数1.我们将说,与第一个序列渐近的第二个序列*也代表有理数*1,或者说,它*以*1*为极限而收敛*.

循此可推出:若两个序列都渐近于第三个序列,则此两序列也彼此渐近;同时,若其一序列以某有理数为极限而收敛,则它序列也必如此.这样,有许多序列,其形式虽各不相同,却可能代表同一个数.实际上也确是如此.例如2这个数,就可以用无限个有理序列来表示,其中有:

$$1.9,1.99,1.999,1.999\,9,\cdots;$$

$$2.1,2.01,2.001,2.000\,1,\cdots;$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, \cdots;$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{15}{16}, \cdots.$$

其他一切有理数也都是如此.特别的是:每个渐逝序列都可视为 [144] 有理数 0 的代表.

5

形式最简单、同时又具有历史和理论上的重要意义的序列,是几何序列.设以一任意数为首项,以另一任意数为公比,则各项可用公比递乘而得.一切重复序列都可以看作是一种特殊的几何序列,其公比等于 1.如果除去这种特例,我们可将所有几何序列分类为递增的和递减的.各举一例如下:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots, 2^n, \cdots;$$

和

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots.$$

在递增的几何序列中,各项的绝对值无限地增长;就是说,如果我们"走到"足够远的地方,定可找到大于不论多么大的任意数的项.这种序列称为发散序列.

递减序列必是渐逝的,由于这个原因,我们在此对它特别有兴趣.尤其有特殊价值的是,这种渐逝几何序列所产生的级数,常以某有理数为极限而收敛;反之,任何有理数都可以看作是某个有理几何级数的极限.再者,它是我们根据直接的数据就能实际计算出"级数之和"的少数几种级数之一.

几何序列所产生出的级数称为几何级数.渐逝几何序列则产生出收敛级数.若序列的首项为 a,公比为 r,其极限可以由 [145] 下列简单公式得出

$$s = \frac{a}{1-r},$$

这个极限称为级数的和.

芝诺第一论中的二分法序列就是几何序列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,$$

它产生出一级数

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots.$$

后者的极限为1,这可以直接看出或用求和公式求得.

虽然芝诺宣称

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

这序列的和的项有无限之多,但是其值表示有限数1.收敛和极限这两个概念的采用,固然可以根据各种理由加以反对,不过一旦接受了之后,芝诺所说的无穷级数之和一定是无限的,就完全失其依据了.

芝诺的第二论也涉及一个几何级数.为具体起见,设阿基里斯以每分钟100英尺的速度前进,龟则以每分钟1英尺的速度前进.设龟原在阿基里斯之前990英尺,问阿基里斯需要多少时间才能追上龟?芝诺说:永远不可能.而"常识"告诉我们,阿基里斯每分钟赶上龟99英尺,原有的990英尺的距离在10分钟之后就完全赶上了.但是让我们采用芝诺的方式来推理.当阿基里斯走到龟原在的位置时,龟又走了原距离的$\frac{1}{100}$,即9.9英尺;当阿基里斯又走到龟的第二位置时,龟又走了9.9英尺的$\frac{1}{100}$,[146] 即0.099英尺.但是"说过一遍的话可以永远重复下去".龟与阿基里斯的距离就成为几何级数

$$990,9.9,0.099,0.000\,99,\cdots,$$

其和可用求和公式求得为1 000.就是说,阿基里斯必须走1 000英尺才能追上龟,而这就要他花10分钟时间.这样一来,无限项之和又可以是有限的了.

6

循环小数只是几何级数的乔装打扮.

先看所谓纯循环的无限小数的例子

$$0.363\,636\,36\cdots,$$

我把它简写为 $0.(36)$.

这个数的实际意义乃是

$$\frac{36}{100}+\frac{36}{10\,000}+\frac{36}{1\,000\,000}+\cdots.$$

然而这是一个公比为$\frac{1}{100}$的几何级数,求和公式证明这个级数以有理数$\frac{36}{99}$,或$\frac{4}{11}$为极限而收敛.所谓混循环小数的情况也与此相同,例如 $0.34(53)$,以 100 乘之,则得纯循环小数 $34\frac{53}{99}$,因为混循环小数之值为其$\frac{1}{100}$,故得 $0.34(53)=\frac{3\,419}{9\,900}$.

即使是一个有限位小数,也可以当作循环小数来看待,其循环节是 0.例如:

$$2.5=2.500\,00\cdots=2.5(0).$$

我们在学校里学过如何化分数为小数的方法.所用的方法叫作长除法,我们由经验得知,其结果或则得出一个有限位小数,如$\frac{1}{8}$可化为 0.125;或则得出一个无限循环小数,如$\frac{1}{7}$可以用 0.(142857)来表示.这种性质可以有极严密的证明,并且可以表述为下列命题:*任何有理数都可以用而且只可以用一种无限循环小数表示;反之,任何循环小数均表示一有理数.* [147]

另一方面,我们显然可以构造出许多小数序列,虽然位数无限,却非循环.其各位数字的排列或者是杂乱无章的,或者依循某种正规而不循环的规则.例如以下的小数就是:

$$1.10111213\cdots192021\cdots100101\cdots.$$

如果我们能够找出一个重复有理序列 $a, a, a, \cdots$ 与这个小数序列为渐近，那么这个小数序列便代表有理数 a 了. 然而我们知道这是不可能的；因为如若可能，则这个小数序列应为循环数，但它却并不是. 那么这个小数所表示的到底是什么呢? 我们不知道. 在我们规定收敛和极限的定义的时候，早就排除了把这种序列作为一个数的可能性了. 然而还存在着我们直觉的关于收敛和极限的观念，它是某种递增而不超过某一数量或递减而不小于某一数量的东西. 从这种直觉观点看来，这种无限而非循环的小数级数的确是收敛的，此外还有许多序列也是如此，如

$$\left(1\ \frac{1}{2}\right)^2, \left(1\ \frac{1}{3}\right)^3, \left(1\ \frac{1}{4}\right)^4, \left(1\ \frac{1}{5}\right)^5, \cdots,$$

这个级数，碰巧代表了超越数 e.

收敛和极限的这种素朴观念就是早期分析学采取作为公理性的观念，我们应当承认，虽然这种观念引出了某种危机，可是也正因为有了它，微积分才获得其最初的成果. 现在最自然出现 [148] 在头脑中的问题是：是否能够将收敛和极限的这种含糊直觉观念用精确的系统表述的定义来概括呢? 是否能用这样的定义来造出一种新工具，以使我们能够在处理像非循环小数以及其他序列那样的数学的新实体时，具有如同处理那些以有理数为极限的特殊序列时一样的确定性呢?

7

要回答这些问题，我们必须考察，在收敛于有理极限的特殊序列中，是否有一种性质，能立即推广到范围更大但并不是如此收敛的序列上去. 康托尔发现了一种这样的性质，我就叫它为收敛序列的自渐近性.

为说明这点，让我们再取二分法级数为例. 我们将这个序列的各项“移前”，即弃去第一项，以第二项作第一项，第三项作第二项，如此等等. 用这种移前法可以次第作出各序列：

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\cdots;$$

$$\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\frac{255}{256},\cdots;$$

$$\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\frac{255}{256},\frac{511}{512},\cdots.$$

这显然可以继续下去以至于无穷.现在即使把这些序列略略考查一下,就可以看出它们都彼此互为渐近;就是说,其任意两个序列所组成的差序列都为渐逝.

一切收敛于有理极限的序列都可以证明其为自渐近;不过自渐近的性质并不限于此等序列;事实上,每个无限位的不循环 [149] 小数也都有这种性质.就取下列的小数为例:

$$0.101\,112\,131\,415\cdots,$$

它可写成序列

$$0.1,0.10,0.101,0.101\,1,0.101\,11,0.101\,112,\cdots.$$

显然,在弃去这些有理近似值的前若干个之后,即使这个序列的外表也没有什么改变.这样,我们可以把它写成下列的形式:

$$0.101\,112,0.101\,112\,1,0.101\,112\,13,0.101\,112\,131,\cdots,$$

它一定和先头的序列渐近.

康托尔把收敛和自渐近两个名词等同起来,从而推广了收敛的观念,在此之前,这个术语只限用于与某种有理重复序列为渐近的序列.不但如此,他还把这种自渐近的序列当作用来产生一种新型的数学实体,他把这种新实体与在他之前很早就被称为实数的数等同起来,这样,他又推广了极限的观念.

8

现在,如果固本原则所要求的条件都能证明得到满足,这种新实体就可以当得上数的名称了.

在收敛序列中,有若干序列是以有理数为极限的,因此,第一个规定就得到了满足.第二个规定要求的是等级判别准则.那



么让我们取确定实数 a 和 b 的两个序列 (A) 和 (B) 来考察，我们构成其差序列 $(A-B)$. 也许这个差序列恰为渐逝的，在这种 [150] 情况下，(A) 和 (B) 互为渐近，我们就说两数 a 和 b 相等. 取下面两个序列为例

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2,\left(1\frac{1}{3}\right)^3,\left(1\frac{1}{4}\right)^4,\left(1\frac{1}{5}\right)^5,\cdots$$

和

$$2+\frac{1}{2!},\qquad 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},$$

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!},$$

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!},\cdots.$$

可以证明它们是渐近的，所以它们表示同一个实数，即超越数 e.

如果其差序列不是渐逝的，那么也许从某项开始之后，各项皆为正，在这种情况下，我们说序列 (A) *优超*于序列 (B)，也即是实数 a 大于实数 b. 其次，如果从某项开始之后，差序列的相继各项皆为负，则 (A) 为 (B) 所*优超*，于是我们说 a 小于 b. 当序列 (A) 和 (B) 的极限为有理时，可证明这些判别准则便化为标准的形式.

最后，我们规定，两个实数的和及积，就是原两序列的相应项之和及积所成的序列所确定的实数. 这自然意味着所成的序列本身也是收敛的才成，而这一点确可严密地证明其为如此. 不止如此，这样定义的加法和乘法还可证明具有结合、交换、分配诸性质.

由固本原则的观点看来，这种新数就可以算作羽毛丰满的数了. 把它们加进来以后，有理域就变为更加广大得多的领域中的一个局部，这个新领域，我们叫它*实数域*.

[151]

9

这个新域是否完全包括了代数中的无理数和分析学中的超越数呢？ 是的. 为了阐明这一点，让我们再回到 $x^2=2$ 这个方程

式，就是这个方程式，在两千年前以求正方形对角线问题的形式出现，就是它带来了第一次危机，这个危机现在已经以建立实数域而告结束.

我们在学校里学过了求平方根的算法. 由这方法求出我们称为$\sqrt{2}$的一组有理近似值，它们构成一个收敛序列：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.414\,2, 1.414\,21, \cdots.$$

这个序列没有有理极限，但是它的每项的平方数所组成的序列

$$1, 1.96, 1.988\,1, 1.999\,396, \cdots$$

却收敛于有理数 2.

所以，当我们说方程式 $x^2=2$ 的正数解就是方才所论的序列，并以$\sqrt{2}$来表示此所确定的数时，我们的意思不但是说其平方序列为收敛，同时也是说，它属于具有有理极限的少数收敛序列的类型，在这里，其极限是 2. 换句话说，序列所以表示$\sqrt{2}$者，盖因 2 虽然不是一个完全平方数，它却是一组平方数组成的序列所收敛的极限①.

同样的方法也可施用于其他的代数方程式或超越方程式. 要实际作出一个算法以得出收敛于某特例所求的解答的序列，在数学上常是一件相当困难的事. 然而一旦有了，则该序列总可 [152] 以化成一个有无限位的小数，这个小数的本性就是收敛的，从而表示出一个实数.

所以，承认了无限算法的有效性之后，它就可以带我们走出有理算术的被限制的边界. 由此产生了一般的算术. 也就是实数的算术. 我们就可以用这个手段来解决从前有理算术所束手无策的问题了.

10

乍看起来，我们给有理序列的极限以实数这个极广泛的名

① 参看附录 17.

称，似乎缺乏先见之明．因为现在自然会使人想到这些无理数所作出的无限序列．如果我们叫原来的无理数为第一级无理数，则这种新极限就可称为第二级无理数；从这里，我们还可以推出第三级……等等无理数来．为免空口说白话之讥，可取一简单的式子$\sqrt{1+\sqrt{2}}$为例，它的直接解释构成了如下的无理序列：

$$\sqrt{2.4},\sqrt{2.41},\sqrt{2.414},\cdots.$$

然而，至少在这个例子，上面提出的反对是没有理由的．因为如果我们设$\sqrt{1+\sqrt{2}}=x$，用简单的代数演算就可证明 x 是方程式 $x^4=2x^2+1$ 的一个根．对于这一点，我们可以用一个和求方根的算法相类似的方法，求出一组有理近似值，于是$\sqrt{1+\sqrt{2}}$又可以用一个有理序列来表示，这个序列与先前所考察的无理序列是渐近的．

乍看起来这虽然似乎是奇怪的，但它却确是一种极为普遍的事实．对于任何无理序列，总可以找出一个有理序列（通常不止一[153] 个）与它为渐近．因此，分级无理数的提出，虽然站在纯形式的立场说来是有意义的，但就一般算术而言，则只是画蛇添足了．

11

凡可用无理序列表示的，总可以用一个有理数序列来代表，这个命题非常重要．它赋予了有理数在数学理论中的特殊作用．既然任何实数都可用无限收敛的有理序列来表示，则有理域，再加上收敛和极限两个概念的帮忙，就足够建立全部算术了；由算术产生出了函数论，而函数论是现代数学的奠基石．

而这个基本事实在应用数学中也具有同样巨大的重要性．既然任何有理序列都可表示为一个无限位的小数，则一切计算都可以系统化了．计算者只消取所需的几位小数数字，便可得到任何无理数问题或超越数问题的一个有理近似值．进而言之，他的计算的准确性不但可以很容易地估计出来，而且甚至能事先

指定①.

12

曾经有人问过路易十四(Louis XIV),他的国际政策的指导原则是什么,据说他讽刺地回答道:"吞并!反正这行动总可以找着一个聪明的律师来辩护的."

每当我回想起无限和无理数这两个问题的历史时,我便记起了这段轶事.用一个有理近似值来代替无理数,或者,同样地,[154]用无限序列中的某一提前项来代替其极限,这种方法,世界并不需等待魏尔斯特拉斯和康托尔来确认.依据有理近似值,人们以之丈量田地,修建大厦,挖掘运河,建筑桥梁,制造军火,铸造机器,从来不去查问所用的原则的正当性如何.

我以前说过西翁和希罗所给出的整数方根的近似值.有迹象表明,这些问题具有古老的来源,也许可以回溯到早期的毕达哥拉斯学派.但是只有阿基米德才是第一个把这原则加以系统应用的人.

让我们再回到化圆为方的古典问题,它清楚地反映出数学进展过程中的各个阶段.如我前面所说,阿基米德的办法是把圆周看作包围于两组正多边形之间的东西,一组多边形内接于圆,一组外切于圆.他由6边形开始,逐次加倍其边数,直到96边为止.一系列内接多边形的周界组成一个序列,外切的周界则组成另一个序列.若此过程无穷继续下去,则这两个序列都将向同一个极限收敛,这个极限即是圆周的长度.若圆的直径为一,则其公共极限为 π.

这些序列可注意之点即二者都为无理序列.第一个序列的前两项是 $6, 6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$,第二个序列的前两项是 $4\sqrt{3}, 24(2-\sqrt{3})$,且其相继各项含有更加繁复的根号.阿基米德很自信地用

① 参看附录22:论计算术.

有理数来代替这些无理数序，并用这种方法推演出 π 的值被包在两个有理数 $3\frac{1}{7}$和 $3\frac{10}{71}$之间.

[155]

13

也就是这两个古典问题，根号及 π 之求值，促成了另一个重要的无限算法的发展：即连分数. 虽然有些数学史家宣称希腊人已经知道了这个东西，但是我们今天所掌握的关于连分数的最早文献，却是 1572 年邦别利(Bombelli)的一本书. 不过，照他所说："其他作者在其著作中已经提出了许多组成连分数的方法；他们互相攻击，而又缺乏正当的理由. 因为，照我看来，他们所寻求的都是同一目标."由此判断，这种算法早在 16 世纪就已为人们所知了.

$$\sqrt{2}\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

邦别利所说的"同一目标"就是指求根号的有理近似值. 我可用$\sqrt{2}$来解释这个法子. 这个数是包含在一与二之间的，让我们设$\sqrt{2}=1+\frac{1}{y}$. 由此我们得 $y=1+\sqrt{2}=2+\frac{1}{y}$. 如此继续，我们即得出分数这是连分数的一种特殊型式；它叫作简单连分数，因为其所有的分子都是一，又叫作循环连分数，因为其分母都是重复的数.

如果在一个连分数中，我们只取其一个元素，两个元素，三个等等，我们即得出一组有理近似值，这些近似值，我们称之为

[156] 渐近分数. 在$\sqrt{2}$的情形中，其渐近分数是：

$$1,1\frac{1}{2},1\frac{2}{5},1\frac{5}{12},1\frac{12}{29},1\frac{29}{70},1\frac{70}{169},\cdots.$$

有两个特点使连分数特别有价值. 第一点，凡简单连分数必定是收敛的，第二点，它有一种振动的性质. 实际上，我们可将渐

近分数分为两组：一组取第一，第三，第五等项；另一组取第二，第四，第六等项．在$\sqrt{2}$的情形中，我们得到两个渐近序列：

$$1,1\frac{2}{5},1\frac{12}{29},1\frac{70}{169},\cdots;$$

$$1\frac{1}{2},1\frac{5}{12},1\frac{29}{70},1\frac{169}{408},\cdots.$$

第一个序列逐渐增加而以$\sqrt{2}$为上限，另一个则逐渐减少而以$\sqrt{2}$为下限．这种振动的特性使连分数在计算精确的近似值时，格外有价值．因为在任一个渐近分数上停下来时，由省略而生的差误很容易估计出来．

18 世纪，欧拉证明了*凡是二次方的无理数必可用一个简单循环连分数来表示*；不久，拉格朗日证明其逆也是正确的，即凡是这样的*循环连分数必代表一个二次方程式的根*．于是循环连分数在二次方程式上所占的地位，也就和循环小数在一次方程式上所占的地位相同了①．

14

我们对于$\sqrt{2}$所建立的办法可以应用于任何方程式上，所以，大多数一般方程式的实数解当可用一个连分数来表示．但是，只有在二次方程式的场合下，这连分数才是循环的．我们起初也许会觉得，连分数只适用于代数运算．如果这样，我们就可以得到 [157] 一个区分代数无理数和超越无理数的准则了．就连分数的代数来源对其元素的大小数量有某些限制而言，上述看法是一桩事实；事实上，就是这种限制才使柳维勒发现了*非代数数的存在*．但是，除此以外，代数的办法，不论是对连分数，或(就我们所知)对于任何其他形式的序列，都并不占有什么特殊地位．也就是因为无限算法对于代数有着这种明显的“无区别”，才使得研究超

① 参看附录 23：论连分数．

越数理论遭到巨大的困难.

因此,举例来说,超越数 π 和 e 可以表示成相当漂亮的连分数的型式,读者请翻阅本章末尾的表便可见到.

将 π 展开成一个连分数,这是兰伯特在 1761 年发现的,它有很大的历史上的重要性.这个分数的不循环性也就断然地证明了:π 不能是含有有理系数的二次方程式的一个根.这意味着:圆不能单用直尺和圆规使之变成正方.我说*意味着*,而不说*证明*,因为 π 仍然可以是仅含有二次方无理系数的二次方程式的根,在这种情况下,这个连分数也是不循环的,然而可能用直尺-圆规的方法作出.

15

在简单连分数和无限位的小数之间,有明显的相似之处.第一,这两种类型的序列都是收敛的,就是说,连分数里面的次第相继的分子和小数中次第相继的各位数字,不论依照什么样的随机规律,它们总是代表一个实数.第二,若其次第相继的法则是循环的,则该小数代表一个有理数,而循环连分数则代表一个 [158] 二次方的无理数,就是说,$a+\sqrt{b}$的形式的数,这里,a 和 b 都是有理数.最后,凡实数总可以用小数或是连分数的形式来表示,但得把普通的分数都看作连分数的一个特例.

这些性质使这两种算法特别适宜被选择出来代表实数.无限算法的历史还围绕着另一种算法展开,其范围更为普遍,同时也因为其极大的普遍性和含糊性,便引起了若干怪异的、悖论性的结果.

这个算法的起源无疑是来自几何级数,我们若从芝诺的论政看来,它已早为古人所知了.当我们仅限于正几何级数时,我们看到,若其公比小于一,则级数为收敛,否则便为发散.这个结果马上可以推广到交错几何级数上去,亦即其公比为复数的场合.若此公比是一个真分数,则交错几何级数也是收敛的,否则便为发散.然而,若当公比恰好是 -1 的时候,便发生一个有趣

的情况．该级数变成下列的形式：

$$a-a+a-a+a-a+a-a+\cdots,$$

我们今天说这个级数是发散的，虽则其总和永远不会超过 a．实际上这个级数可以翻译成下面的序列：

$$a,0,a,0,a,0,a,0,\cdots,$$

而这个序列并没有一个确定的极限．可是莱布尼茨却另有看法．他主张 a 和 0 这两个极限都有相等的可能性，而且主张其总和趋近于其平均值 $\frac{1}{2}a$ 作为极限．

莱布尼茨讨论级数的著作迟至 17 世纪方才出现，它是研究这个论题的最早著作之一．这种级数的早期历史有一个特征：即现在认为是很基本的级数的收敛或发散问题，当时却多少被忽视了．所以，例如，当时人们大都相信，如果产生某一级数的序列是渐逝的，则该级数必定收敛．我们可以看到，这对几何级数是真实的，而且这无疑地就是这个远播四方的错误的发源点．一直到雅克·伯努利关于无限级数的著作在 1713 年出版之后，对这个问题才得到一个清晰的看法．该著作中举出了调和级数为例： [159]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots,$$

产生这级数的序列是渐灭的，所以通常相信这个级数是收敛的．然而伯努利在他的书中有一个证明（是他的兄弟约翰作的），证实了这个级数缓慢地然而确实地为发散的．

16

伯努利的著作指出了建立收敛性的判别准则的必要性．其普遍项，即产生级数的序列的渐逝性，当然是一个必要的条件，但它一般地是不充分的．充分的条件是达兰贝尔、马克劳林（Maclaurin）、柯西、阿贝尔和其他很多数学家所建立的．我不打算详细讨论这个题目，因为它超出了我的一般目的．但我要指出，确认一个级数是否收敛，即使是在今日在某些情况下，也还

是颇为棘手的.

然而,存在着一个特别类型的级数,这在早期历史上是一桩引起相当大的兴趣的事.在该例中,其普通项的渐逝性的确是其[160] 收敛性的判别准则.这就是所谓交错级数,其典型形式为:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots,$$

这个级数收敛于数字 2 的所谓自然对数①,其近似值是 0.693.而这个级数的绝对值便是调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

如我们说过的,它是发散的.

我所以提起这个类型的级数的理由,是因为它应该负一些混乱事故之咎.在 17 和 18 世纪,对于级数一般都是不把它们看作序列的特殊类型,而看作无限多个项的和.于是自然赋予这个"加法"以有理运算的性质,即可交换性和可结合性.因此人们就认为:既然总和与各项的排列次序无关,便无妨把其中各项随意重新排列了.

在 1848 年,狄黎克雷证明了在一切项都是正数的收敛级数中,情形确是如此.但是,若是这级数有负数项时,则可能出现两种情形:假若这级数是绝对收敛的,就是说,各项的绝对值形成的级数是收敛的,则交换律和结合律的确能够成立;但若这级数只是有条件地收敛的,就是说,其正数项所成的级数是发散的,则这些性质就土崩瓦解了;事实上,若适当地重新排列各项,那就可以证明其总和等于任意数.

这就无怪乎在狄黎克雷之前,在处理级数时,特别是对处理

---

① 一个数字 A 的自然对数等于下式

$$e^x=A;x=\log A$$

中的指数 x,此处的 e 是前面一再提及的超越数.其近似值为

$$e=2.71828.$$

我们称之为有条件地收敛的级数时,会得出这么多的古怪结果 [161] 了.调和级数就是历史上的一个例子.我们若以 x 表示其奇数项的"和",以 y 表示其偶数项的"和",则我们可写作:

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots ① = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

由此,我们可以粗心地得出

$$y = \frac{1}{2}(x + y), \quad 或\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y, \quad 或\ x - y = 0.$$

得到的荒唐结果是:交错调和级数收敛于零,实际上,这个级数是以 2 的自然对数作为它的极限的.

这些讨论在今天看来虽然显得很荒谬,可是在 18 世纪初期,甚至到 19 世纪的早期,却是十分普通的.所以直到 1828 年,阿贝尔写信给他以前的老师霍姆波(Holmboe)时,还诉苦道:

> "发散级数真是魔鬼的发明,如果根据它们来作任何证明,简直是一种憾事.通过使用它们,人们就可以得出任何他所喜欢的结果,这就是这些级数所以产生出这么多的谬误和这么多的悖论的原故……我对所有这些情况已经加以极大的注意,因为除了几何级数之外,在数学的任何场合,还找不出一个其总和已经严格确定了的无限级数.换句话说,在数学上最重要的东西同时也就是最欠缺根据的东西.这些东西中的大多数,虽则特别古怪,却都是正确的,我正在寻找其理由,这是一个十分有趣的问题."

17

阿贝尔的信已经表现了新的精神.这是一个新时代的黎明,数学上的批判时代的黎明.从文艺复兴开始以来占统治地位的朴素态度达到了穷途末路的地步.在数学科学的各个领域中取

① 原文如此.应作 $y = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$.——译者

[162] 得了赫赫惊人的战果；现在必需把这些战果组成系统，特别需要的是精细考察这些系统得以立足的基础.

讲述柯西和阿贝尔以来无限算法的故事，也就等于讲述近代分析学和函数论的故事，这已经超出我们的范围了.但是这里对无限算法的早期历史的素描，已足以表明，康托尔的无理数理论，不过是历史上长期演变的累积结果罢了，这个演变起于毕达哥拉斯学派的危机，其间，当一切观念的进步被阻挠时，它也就被暂时阻挠了，直到文艺复兴时期，才又重新发展.

[163]

数 π

$\frac{\pi}{2}$=乘积的极限：$\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot\frac{10\cdot10}{9\cdot11}\cdot\cdots$

$\frac{\pi}{4}$=级数的极限：$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\cdots$

$\frac{\pi}{2}$=级数的极限：$1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)+\cdots$

$\frac{4}{\pi}$=连分数的极限：$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\cdots}}}}}}$

数 e

e=序列的极限：$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\left(1+\frac{1}{5}\right)^5,\cdots$

e=级数的极限：$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots$

e=连分数的极限：

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}}}}$$

至于我上一章讲的分析学的情形,其长期摸索的原动力乃是一种信仰,一种对于无限的绝对性的盲目信仰.这种信仰最后得到其最好的代表:连续统的新理论,这就是我即将要讲的.

[164]

第9章 填补空隙

虽然"是"和"非"都有准绳，
"上"与"下"也有逻辑来规定，
人所欲测度的万物之中，
我无所深求，唯举——金樽.

啊，但是我的算法，人家说，
果能把岁时校正吗？——未必，
那不过是从日历中除去了
未生的明天和已死的昨日.

——莪默·伽亚谟

1

无限算法的有效性之承认，使我们解脱了有理域的狭隘限制，并且获得了一个武器，来对有理算术无能为力的问题展开进攻.这样，人们自然要问：我们现在是否能更好地来解决建立直线上的点和数域中的数之间的完全对应性这个老问题了呢？

我们知道有理算术是不能解决这个问题的.然而，一般的算术，即实数的算术，在这方面是否处境较好，还是一个疑问：线上有些点曾避开了有理的表示法，它们到底能否都在一般算术的领域中系统地表述出来呢？曾经引起了早先的危机而迫使算术修正其基础的那个古老的问题，现在又以一种新的和更普遍的

形式重新出现了:

任一实数是否均能用直线上的一点表示出呢? 对直线上的任一点是否均能指定一个实数呢? [165]

如果答案是肯定的,那么在以实数域为一方和以点的集合为另一方之间,就有了一个完全而且可逆的对应了.如果有这种对应,我们就可以放心地用几何的直觉语言来表述算术的问题.如果有这种对应,我们就可以使几何问题具有算术解析的全部力量和精确性,就可以把它们都归结为数和量的问题.由此可见,这个问题何等重要,又有多少问题的解决有赖于对这个问题的回答.

2

要理解这个问题的现代答案,我们必须对两种集合的本质分别予以探究,这两种集合是:实数域和直线上的点.

关于实数域,我们知道:

第一,实数域是良序的:对于两个任意的实数 a 和 b,我们总能说出孰大孰小.再者,若 a 大于 b,b 大于 c,那么 a 也就大于 c.总而言之,我们可以用一种心理的动作而将实数的任何无限集合,依其大小的次序排列出来.我们更可进一步想象所有实数已经如此排定.这就是我们说的实数集合为良序的意思.

第二,这个域既没有第一数也没有最末一数:不论一个多么大的正实数,仍然还有一个比它更大;不论一个多么小的负数,也还有一个比它更小.这一点,我们的说法是实域由负无限大伸展到正无限大.

第三,在实数中,可以找到一切有理数.有理域不过是更为广大的实域中的一个子域罢了. [166]

第四,实数的集合是处处稠密的.任何两个实数不论其区间是多么小,中间总可以插入无限个其他实数.

据此而言,岂不就可以说实数域是无所不包的吗? 是的,如果我们不是在与有理数打交道时有过经验,我们大概会毫不犹

豫地一口肯定了；因为，不要忘记，我们前面对实域所述的一切，对有理数同样适用．可是，虽然有理数具有严密的构造，我们却发现它“满是空隙”了．谁能担保无理数和超越数就完全填满了这些空隙呢？——谁又敢担保在将来，也许是不久的将来，不会发现新的方法，这种方法通过创造新的数学实体而暴露出（这次是在实数域中）新的空隙呢？

3

要回答这个问题，康托尔着手探究了有理域和实域的根本相异之点．

有理数的集合，虽然是良序的，稠密的，但是是不完备的．其所以不完备，是因为它对于无限算法不是闭合的．其所以对于无限算法不闭合（无理数之存在即证明此点），是因为有无限多的有理序列，虽然收敛，可是没有有理数为其极限．总而言之，有理数的集合所以不完备者，因为它不能包含其本身的全部极限值．

然而，实数集合不但是良序的、稠密的，而且是完备的．其所[167]以是完备的，是因为它对于一切无限算法均为闭合的．一个实数的无限序列，如果收敛，必表示一实数；因为这样的一个无限序列，若其本身不是有理数所组成，必可用另一有理序列代之，后者必向同一极限收敛，这个极限依定义即为一实数．实数的集合包括了其本身的全部极限值，因为这个理由，它就是完备的了．

因此，每一个紧密集合不一定是完备的，这在分析有理域时可以看出；但是每一个完备集合都是紧密的，如康托尔所证．若一个集合既是良序的且又是完备的，康托尔名之曰连续统．实数域成一连续统，即算术连续统．反之，有理数域因为不完备，所以不成为连续统．

4

因此要用一句话来周密无遗地描述实数域，就是说此域为

一连续统，即康托尔所定义的连续统．我们业已看到，连续统、连续的、连续性诸词早在精密科学起源伊始之时就已经在使用了．从无法查考的邃古以来，连续的一词就已经应用于空间、时间和运动上了，其含义不甚明确，大体上是不间断的、其极小部分与其整体具有相同性质的、一一联系着的，总之，连续的！你不明白吗？它就是为直觉所感知的、意义含糊松懈的那种概念之一；而且若企图将它形成明确的定义，结果常是一句不耐烦的话："算了吧，阁下反正懂得我的意思了！"

具有上述诸性质的一切观念中之最典型者就是线，特别是直线，在我们的心目中，它十足地具有这种连续性．因此如果我们要得出直线和实域间的完全而且可逆的对应，我们必须能够确信，在我们赋予直线的直观的连续性与康托尔所定义的实数 [168] 之明晰而且科学地形成的连续性之间没有什么显见的矛盾．

5

如果让我尽力将我所说的连续的一词作粗略的描述，不必把我们直观的连续性精确地表述出来，那么我会自言自语道：

"时间乃是万物的真诠．因为时间爷爷不知跳越，所以自然奶奶不作跳越．我们绝不能想象出时间有所中断，所以自然界就不能有突然生出的东西．时间顺流而去，在它的流逝中载着一切可以想象的事物．"

所以不论我们想要描述何种现象的连续性，都不免(甚至好像是不自觉地)乞灵于时间的连续性．线在我们看来是一切连续事物的典型，因为我们想象它是由一个连续的推移所产生的，因为在我们心中，它不过是时间之流在假想冻结时的具体代表罢了①．

对于其他现象也是如此．我们的心灵不敢接受突然自生的

① 参看附录20．

东西;就为了这一点,所以科学理论总是紧紧地依附于进化.不管是宇宙起源学说还是生命学说,或是社会学的假说,到处都可以见到对于剧变的忌讳.我们无论如何不愿承认突变、革命、突然生成和偶然发现等是宇宙史或种族史上占统治地位的因素.

正如进化给我们一幅关于我们过去的平滑图象一样,因果论将一切现象串连于一根连续的链条上,保卫着我们的未来不致受到突发的干扰和混沌的恐怖.连续性和因果性这两种含糊观念是密切关联的,常常彼此互相乞灵,互相扶持.所以无怪乎[169]我们对于宇宙连续性的信仰和对于事物间因果相连的信念,二者都不过是我们称之为时间的这种原始直觉的两个方面而已.因此,一方面,我们有信念:Natura non facit saltus(自然界没有飞跃),另一方面,我们涌起了幻想:post hoc, ergo propter hoc(后于此,所以由于此).

6

在这里,我体会到了我们物理概念所依据的几何直觉和算术的逻辑之间的冲突的发生.宇宙的和声学只知道一种乐式——连音(legato);而数的交响乐又只知道其反面——断音(staccato).调和这个分歧的一切尝试,都是寄希望于断音的加速会在我们听觉上显得好像是连音一样.然而我们的理智总是把这类企图标为骗术,把这类理论当作一种侮辱而拒绝,把它看作试图证黑为白的形而上学.

然而这种反对也是枉然.人类想要飞渡我们时间概念的连续性和数的结构的内在不连续性之间的鸿沟,不得不再次乞灵于其心灵的能力:“若一种动作曾为可能,则心灵本身自会想象其能重演以至于无穷”.这就是无限的历史角色;这就是长久以来连续统问题和无限问题都处于进退维谷之境的原因.这种长时期的调整过程,现在在康托尔的理论中达到了顶峰.在这里,每一个数被看作一串无限跳动的最后目标,而连续统则被视为

不但包含一切可能的固定位置，而且包含一切可能的目标.这是一种超等的断音理论；可是它也逃不出时间的统治.它只是自己 [170] 适应于这种统治而心满意足地将时间之流看成一串无限的、节拍猛烈加速的振动罢了.

心灵反抗这种统治，心灵所需要的是一种不受几何和力学的外来影响的数的理论.于是历史上又见到一种姿态：这就是以一种新的无理数理论的形式出现的、以其作者的名字为名的狄德金(Richard Dedekind)理论.

7

狄德金概念的精髓可于下面的几段引文中见到，这几段是从他的划时代论文《连续性与无理数》中引出的，此文发表于1872年，是在康托尔关于同一问题的许多论文印行的前十年：

> "直线上的点的个体比之有理数域中的数的个体要丰富无限倍.……
>
> "所以想用算术的方法以探求直线具有的诸现象，我们发现有理数域是不够用的.如果数域需要具有如直线那样的完备性，或者如现在所说，具有那样的连续性，则绝对需要创造出一种新数以改进此种工具.……
>
> "若把直线看作具有完备性、无空隙、连续性诸性质；则有理数域和直线比较起来，即可发现前者有空隙，有某种不完备或不连续了.然而直线的这种连续性在什么地方呢?一切事情都视这问题的回答而定，也只有通过这个回答，才可以得出一切连续域的研究的科学基础.说最小部分具有不间断的连结这种含糊的话，显然是得不出什么东西的；问题在于要指明连续性可以作为合理演绎的根据的明晰特点.多年以来，我苦思这个问题而不得结果，但最后却寻出了我所追求的东西.对于这个发现，也许不同的人会给予不同的评价；大多数人可能认为这个想头非常一般.内容大概 [171]

如下:在前节中,我们已经注意到了直线上的每一点都将直线划分为两个部分,其中一部分的所有点都在另一部分的所有点的左边.我发现,连续性的精髓在其逆命题中,即在如下原则中:

"如果直线上所有的点分成两组,使一组中的每一点都在它组中每一点之左,那么,存在唯一的一点,它将线上的一切点划分为这样两组,也就把直线割成两个部分.

"如前所述,我想,假若我估计每人都会马上承认这个陈述的正确性,这个估计是不会错的;不但如此,大部分读者对用这种极一般的说法来揭示连续性的秘密,都会觉得十分失望.对此,我可以说,我很高兴人人都觉得这个原则是那么显而易见,又和他自己的直线观念那么谐和;因为我实在不能举出任何方法来证明其正确性,别人也是没有这个能耐的.直线之具有这种性质的假定,实在就是一个赋予直线以连续性的公理,我们据之以定义直线的连续性.如果空间有一种真实的存在,它并非天然地是连续的;如果它是不连续的,它的许多种性质会照样不变.又如果我们确知空间是不连续的,谁也不能禁止我们当需要时在思想中填满其空隙使之成为连续的;这种填隙就在于创造新的点之个体,这就要依照上述原理实行之."

8

我们且来分析狄德金的原则.和康托尔一样,狄德金也用有理数域作出发点.不过,他不将实数看作一个收敛的有理数序列,而是看作用心灵划分有理数时所产生的东西.这种特别的划分法,他称之为 Schnitt,译作狄德金分划法①.

[172]

① 德文 Schnitt 这个字,英文有种种译法,如 cut, split, section, partition 等,本书作者取 partition,故此译作"分划法".——译者

这种分划法是狄德金用以定义线的连续性概念的逼肖的复制品.正如直线上任一点都划分此线为两邻接而非重叠的部分一样,每一个实数都能划分所有有理数为两组,两组没有公共的元素,而合起来则包括有理数域的一切数.

反之,任一方程式,任一分组法,任一程序,只要能将有理数域这样地划分,它就被认为是一个事实上的数,依定义,它是一个实数,是新数域的一员.

有理数不过是这个广大数域中的一部分,因为每一个个别的有理数都可看作是一种这样的分组法.事实上,对于任一个已知的有理数,例如 2,我们都能将一切有理数分为两组:小于 2 或等于 2 的列入下组;大于 2 的列入上组.两组中没有公共的元素,而两组合起来就穷尽了有理数集合的全体.有理数 2 可以当作一种分划来看,因此它是一个实数.

然而这个影响甚远的原则的潜在力量,显然不是上面这种微不足道的有理分划法所能完全体现出来的.譬如说,谁也不能禁止我们将一切有理数划分为两组,其平方小于或等于一个已知有理数,例如 2 者为一组,大于 2 者则为另一组.这两组是互不相容的,与上例相同;与上例相同之处的还有,两组合起来就包括了所有的有理数.这种分划法也规定出一个实数,就是我们的老朋友$\sqrt{2}$.

另一方面,有理数和无理数虽然都可用分划法表示,但是采 [173] 取有理数作基础却不是没有原因的,因为有理分划和无理分划之间有一个根本的区别.产生有理分划的数本身是属于下组的:犹如一位政治家分裂一政党,自己参加了左翼.产生无理分划的数则完全是党外的:犹如一个争论使政党分裂,争论本身却既不属于左翼,也不属于右翼.这也正如这里的无理数,虽然它惹起了分划,它却既不属于下组,又不属于上组.换句话说:在有理分划中,下组有一个最大元素,而上组没有最小元素;在无理分划中,下组既没有最大元素,上组也没有最小元素.

依照狄德金的理论,这是区分有理数与无理数这两种类型的数的唯一特点:有理数的特点在于它属于一组,而无理数的特点则恰在于它不属于任何一组.

9

要证明狄德金分划是名正言顺的数,必须证明它们能满足固本原则的各项条件.上节所说已足证明其满足第一个条件了.至于其适合于其他条件,也能极为简单而又完全严密地加以证明.等级判别准则;运算的定义;这些运算的结合性、交换法、分配性的证明等等——都正和康托尔理论中的相应命题相当,我不愿再用细节来麻烦读者了.

康托尔理论的基本定理——实数域对于无限算法是闭合的——在狄德金理论中相对应的是:既已规定了实数域,人们自然会再问,若继续使用这个原则,是否又会使数域得到推广呢?换言之,设想现在用分划法来把所有实数分为两组,这种分划法会不会产生一种新的数量而不在实数范围以内呢?答案是否定的;任何一种这样的分划法都可以用在有理域中的一种分划法来得出同样结果.所以有理域中的一切分划法的集合是闭合的.

[174]

10

这两种算术连续统理论的完全等价,是两位发明者自己也承认的.在今天看来,其间若有相争之处,也只是历史上的偶然插曲而已.有理域的每一个分划法,都有一个无限序列的极限值与之相当;反过来,每一个无限序列的极限值也正可以用来当作有理域的一个分划数.一方面是所有能想出来的分划法,另一方面是所有有理序列的极限值,它们完全一致,不过是同一集合——算术连续统的两种叙述方法而已.

的确,从形而上学的立场看来,这似乎是令人非常迷惑的.前面已经说过,康托尔的理论是一个长期历史过程的最终结果,

而狄德金的分划法却是一种大胆而首创的概念.康托尔的理论使用无限算法来产生数域;而狄德金在其实数定义中却一点儿也没有明显地使用过无限这个字眼,其他如趋于,其大无比,收敛,极限,小于任何给定量之类的词,或其他代用词,都从来没有明显使用过.还有,康托尔的理论显然是动态的:产生出极限值的方法酷似为一个中心点所吸引的某点的运动.狄德金的理论本质上是静态的,除了用心灵的能力按照某种确定的方法以划 [175] 分元素之外,丝毫未用其他原理.因而骤然看来,好像我们终于使数概念完全解脱了由时间直觉所加的束缚,解脱了长期与几何学和力学相连系的时间直觉的束缚.

两种理论的出发点如此相反,所循的道路是那样地不同,而结果却极其一致,正是这种等价表明了狄德金原理不像我们初看起来那样乐观.实际上,进一步分析狄德金的程序,就发现这里虽然没有明显地用到无限,却暗含了无限在内.分划法原理若是应用于个数有限的一组有理数上,就会微不足道,而毫无成效可言.还有一层,利用这原理以决定某一无理数的任何实用方法,都必需使用一种与康托尔的无限序列相类似的工具才成.

11

这个理论与时间直觉之间的关系也是如此.狄德金公理——"若将直线上的所有点分为两组,使第一组上各点都在第二组各点之左,则有且只有一点能产生此种分划法,而使所有各点分为两组,并使直线截为两段."——这条公理恰是我们赋予时间的基本性质的一个巧妙解说.我们的直觉能教我们用心理的动作将所有的时间划分为两组,即过去与未来,二者互不相容,总括起来则包括了整个的时间,永恒.现刻就是分离一切过去和一切未来的分划;过去的每一瞬间都曾经当过一次现刻,未来的每一瞬间转眼又将是一次现刻,所以每一瞬间本身又都可 [176] 作这样的一个分划法.自然,对于过去,我们只知道它是若干相

异的瞬间，不过我们可以用心理的动作来填满它的空隙；我们想象在任何两瞬间之间——不论在我们的记忆之中如何接近——都有着其他的瞬间，对于未来，我们也假定了同样的紧密性．这就是我们名之为时间之流的含义．

还有一层，虽然看来是荒谬的，然而在狄德金所用的意义上，*现刻则是真正的无理数*．因为作为分划，它既不属于过去，也不属于未来．所以在一种以纯粹时间为基础的算术，又如果这种算术是可能的话，则在这种算术里，无理数才是当然之事，而我们逻辑所努力寻求的将是致力于建立有理数的存在．

最后，当狄德金说："如果我们确知空间是不连续的，谁也不能禁止我们当需要时在思想中填满其空隙使之成为连续的．"他这句话是一句*马后炮*．这种填隙过程在很久以前就已完成了，而我们所以永远不能发现空间有空隙的简单理由就是，我们不能想象出时间有空隙．

12

虽然不论是康托尔还是狄德金，都不能将连续从时间直觉的统治下解放出来，但我们的连续概念和数的科学概念二者之间的长久纷争，却仍以后者得到决定性的胜利而宣告结束．这个胜利之所以获得，乃是由于有一门学科必须得到确立，也可以说，必须得到合法化；这门学科就是解析几何．这个方法从费尔马和笛卡儿的时代以来，已成为分析学中所必不可少的工具．它[177]的历史，将在下一章中用一部分篇幅来谈谈．在这里只要说一点就够了，这门学科之开始，只是在于想把几何的问题交给算术分析来解决，而其结果却变成了一件把数的抽象性质与心灵相沟通的工具．它给予分析学以一种丰富的图象文字，并且指引它向着从来不曾梦想过的普遍性的大道迈进．

解析几何以下述的暗含假定作为立足的基础：凡是直线上的点，因而平面和空间的点，都可以用数来表示．这个假定自然

等于断言:线上的点和实数之间可以建立一种完全的对应.解析几何的伟大成功,它在分析学上和几何学上的美妙功用,赋予了这个假定以一种不可抗拒的实力保障.这就有必要把这个原理纳入数学的普遍逻辑结构中去.但是问题是,怎样才能纳入呢?

在这些情况之下,数学是遵旨行事的.它用一个方便的假设来渡过直觉和理性之间的鸿沟.这个假设删除了直觉的观念而用一种逻辑上相容的概念来代替.正因为一切直觉都具有含糊性,这种代替法不仅是讲得通的,而且是易被接受的.

所以,情况就是这样.一方面,这里有逻辑相容的实数概念及其集合,即算术连续统;另一方面,又有含糊的点的种种观念及其集合,即线性连续统.唯一需要的是宣布此二者的同一性,或者换一种讲法,就是作出如下的断言:

直线上任何一点,都可以指定一个唯一的实数与之相当;反过来,任何一个实数都可以用唯一的方法以直线上的一点来表示. [178]

这就是有名的狄德金—康托尔公理.

13

这个命题把解析几何二百多年来赖以立足的暗中假定尊崇为正当的了,它并且变成了这门学科的基本公理.这个公理和其他许多公理一样,实际都是一个乔装的定义:它定义了一种新的数学实体,即*算术直线*.由此,直线——因而平面,及立体——不再是直觉的观念,它们被化为仅仅是*数的承载体*了.

这样,这个公理就等于把几何算术化了.它意味着把分析学从它所由生长的几何直觉中解放出来.不但如此,它还是一个大胆的宣言:从此而后,分析学将统制几何学和力学,又通过它们统制我们认识的其他各个方面,这些方面甚至是更加接近于我们所感知的原始实在的.

由于这种实在的含糊性,所以,长期以来,想利用这种实在

的影象来创造算术的努力都失败了.于是,算术就利用它自身的影象创造了一种新的实在.无限算法就是在有理数失败的地方获得成功的.

Numeri mundum regnant(数统治着宇宙).

第10章 数　域

[179]

"一个求知心切的青年来到阿基米德面前.
教我那种神圣的学问吧,大师,他启请,
它对于天道作出了如许杰出的贡献,
它揭示出天王星之外尚有另一行星.
真的,哲人回答说,它真如你所说的那样神圣,
但它早就神圣,不待它开发了宇宙,
不待它对于天道有如许杰出的贡献,
不待它揭示出天王星之外尚有另一行星,
你所见于宇宙者只是上帝的反影,
而在奥林匹斯山统治着的上帝,乃是永恒之数."

——雅科比

1

尝试,犯错,摸索,跌交——我们的知识就是这样地进步的.受艰苦的生存竞争所妨碍而又受其驱使的人类,既是其周围环境的玩物,也是其时代的传统的奴隶;人类的进展,不是受逻辑的指导,而不过是受种族积累的经验和直觉的指导.人类的一切事物都不过如此,我已经竭尽心力来证明:数学也并不例外.

可是谁知道我是不是因为教书多年而染上了系统说明问题的习惯,使我在不知不觉中犯了错误呢? 数的进化史,从其大体

[180] 看来,的确像是具有某种逻辑的连续性.可是大体也者,常常是一种粗浅的大体轮廓:显示不出多少真正的意义.一根曲线的不规则部分比起它的全形更能告诉我们它的本性;同样,人类在其努力奋斗的发展过程中,其各个殊异不同之处比其相类似的努力奋斗的相同之处,更能清楚地把其潜在因素显示出来.

数学教科书的系统论述所根据的是逻辑的连续性,而不是历史的先后;然而标准的高中数学课程,以至于大学的数学课程,都不曾对这个事实作出说明,因而使学生产生一种印象,以为数的进化的历史次序,就和书中所写的各章的次序一样.主要是由于这种印象,使得人们普遍认为数学中没有人工的成分.因为在这里,这个建筑物好像不需要什么脚手架,而只是在冷酷的庄严中,一层一层地堆叠起来的!这个建筑物应该是不会出错的,因为它立足于纯理性;它的墙是坚不可摧的,因为它在建立起来的时候,不曾有过错误、差谬以至于一点犹豫,因为其中没有掺进一点人类的直觉!一句话,在外行人看来,数学的结构不是易犯错误的人类心灵的产物,而是上帝的绝无差错的神智的作品.

数学的历史揭示了这种意见的谬误.它显示了数学的进展常常是极不规则的,而且直觉在数学中担当着主要的角色.在中间地带尚未开发之前,有时甚至开发者尚未意识到有中间地带的存在之前,遥远的前哨地点就已经到达了.创造种种新形式乃是直觉的功能;逻辑只有接受或拒绝此等形式的权力,却未曾参与产生这些新形式的工作.审判官的判词总是姗姗来迟的,这其间,幼儿却要活下去,所以,他一方面要等待逻辑来批准其存在,
[181] 另一方面却已经在成长壮大了.

数学史中最古怪的一章,复数概念的进化,就具有这部发展史的全部特点.是不是数的科学必定要等待魏尔斯特拉斯和康托尔以及狄德金为实数建立了逻辑基础以后,才去尝试新的征伐呢?不是的;它把实数的合法性看作是当然的事情,随即便向

其世界内的另一个神秘角落进军，通过这次远征，又掌握了一个前所未有的数量和有前途的新领域.

2

我们需要远溯这个新概念的根源.所以让我再回头研究那实数由之发源的代数问题.我们在上文曾经对此进行过研究，但是后来被我们对于无限的长途旅行所打断了.现在我们回到原来的题目，我们所持有的数概念，由于有着我们的新武器即无限算法而大为丰富并增强了力量.我们不用有理数集合了，我们现在有了算术连续统可供使用；而且除了有限代数的有理运算外，我们现在又加上了分析学的有力工具的帮助.的确，我们现在可以很有把握地来着手处理代数的一般方程了！

读者如果还记得初等代数，就知道情况不是这么回事：要解答代数的一切方程，实数也不够用.要证明这点，并不用作出什么高次的复杂方程.我们只消考虑其中一个最简单的方程：二次方程 $x^2+1=0$ 就够了.

这个方程不能规定出一个狄德金的分划，我们也不能作出一个康托尔序列，使其平方以 -1 为极限而收敛.还在12世纪，婆塞揭罗(Bhaskara)这位婆罗门就已用简单有力的语句对此作出表示了： [182]

> "正数的平方，以及负数的平方，都是正的；正数的平方根为二重，一正一负；负数没有平方根，因为负数不是平方数."

所以，将 $x=\sqrt{-1}$ 写作这方程的解答的冲动心理被抑止了，因为这样一个式子是没有什么具体意义的.印度数学家就克制住了这种诱惑，阿拉伯数学家也是如此.虚数的发现，其光荣当归于文艺复兴时代的意大利人卡尔丹(Cardan)，他居然敢在1545年第一次用一个记号来表示无意义的东西.他在论不可能把10分成其积等于40的两部分的一篇演说中，指出了本题的

形式解会引出两个不可能的式子：$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$.

然而，正如在负数时的情况一样，这里也是只把不可能的东西写了下来给予它一种符号存在而已．是的，把它写了下来是有保留的：它是无意义的，诡辩的，不可能的，幻想的，神秘的，虚幻的．不过，有了一个名，就有了很多东西了，即令它只是一个诨号或贬词．

3

令人奇怪的是，不是二次方程而是三次方程，才使得人们把这种神秘东西当作名正言顺的数来使用．它的经过如下：

三次方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根，也可能有三个．当其只有一个实根的时候，就有菲尔罗(Scipio del Ferro)、塔尔塔利亚(Tartaglia)和卡尔丹发明的一个解法，这个解法被总称为所谓的卡尔丹公式．然而，当三个根都是实数的时候，这个公式[183]就不能用了，因为这时进入公式中的方根代表虚数．

我们取有历史意义的方程 $x^3=15x+4$ 为例，这个方程曾被邦别利在他发表于1572年的代数书中讨论过．该方程有三个实根；即4，$(-2+\sqrt{3})$和$(-2-\sqrt{3})$．然而若是运用卡尔丹公式，就引出了一个纯粹虚幻的结果

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$ ①

邦别利想道，也许这两个方根表示的是形式为 $p+\sqrt{-q}$ 和 $p-\sqrt{-q}$ 的式子(我们今天叫作共轭复数)吧．如果真是这样，而且如果这些实体可以按普通的规则进行运算，则这样两个"诡辩"量之和，也许可以得出一个实数，甚至也许就是这个方程的真实的根之一(邦别利知道这个根是4)．我们且看邦别利自己的话：

---

① 参看附录24：论三次方程．

“在许多人看来，这是一个怪想头；我自己好久以来也作如是想.整个事情都像是基于诡辩而不是基于真理.然而我经过长期的研求，最后确实证明它是真的.”

事实上，邦别利果然证明了这两个立方根可以分解为 $2+\sqrt{-1}$ 和 $2-\sqrt{-1}$，它们的和等于4.

4

这些实体是不可能的吧，是的！然而并不是全无用处的，因为它们可以用来作为解决实数问题的工具.于是，邦别利为他的成功而鼓舞，进而着手建立关于这种复杂实体的运算规律.

今天，我们已经用记号 i 来代替 $\sqrt{-1}$ 而把邦别利的符号简化了.凡是复杂实体都写作 $a+ib$ 的形式.用这个符号，邦别利方程的解答便是 $x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=(2+i)+(2-i)=4$. [184]

邦别利的实体我们叫它作*复数*，我们可以证明它们对固本原则的一切条件都满足，从而有正当理由把它们叫作*数*.至于邦别利，他对这个原则是一点也不知道的；他完全是受着数学良心的驱使，数学良心也就是直觉的另一名字.而且除了记号以外，这位得天独厚的意大利人实在已经得出了我们今日所学的一切演算规则了.

固本原则的第一条件是得到满足的，因为复数 $a+ib$ 包含实数作为其子域($b=0$).等级判别准则的条件是：$a+ib$ 及 $c+id$ 两数，若 $a=c$ 和 $b=d$，则相等，否则不相等.至于孰大孰小的判别准则，则没有这样的直捷.不过这里所遇的困难并不严重，用不着特别提出.

两个复数的和也是一个复数，它是将其实部和虚部分别相加而得的；差也能同样求得.两个或多个复数的积，则是将各数用通常的代数规则相乘而得，其中所有 i 的乘幂都相应地用下表中的值来代替

$i=\sqrt{-1}$	$i^5=i$	$i^9=i$	等等
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	
$i^3=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	
$i^4=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$	

邦别利的运算因之也是交换的、结合的和分配的.这原则的一切条件都得到了满足.这样便创造出了复数域,它代替了实域,正如实域代替了有理域一样.

[185]

5

由此得出一个推论:将任何一组有理运算用于复数上,结果还是得出复数.换句话说,复数域对于有理运算是闭合的.

它对于分析学的无限算法也是闭合的吗?或者换句话说,我们能把无限序列、收敛和极限等观念推广应用于复数吗?这个问题由高斯、阿贝尔、柯西和魏尔斯特拉斯在19世纪给出了肯定的答案,而且这个基本事实构成了近代函数论的基础.

但是还在18世纪的时候,复数就已经开始丧失其纯粹的代数本性了.棣美弗(de Moivre)所发现的著名的恒等式指明了复数在三角学中所起的作用,而欧拉更推广了棣美弗的公式,把超越数 e 也囊括了进去.虽然这已经多少超出了我的范围,但为完整起见,我还得把欧拉的这个惊人的恒等式提出来:

$$e^{i\pi}+1=0.$$

与他同时代的一些具有形而上学倾向的人,认为这个恒等式具有神秘的意义.的确,它包含着现代数学中最重要的一些符号,而且看来是一种神奇的结合,在这里,1和0代表算术,i 代表代数,π 代表几何,而超越数 e 则代表着分析学①.

① 参看附录25:棣美弗恒等式.

6

人们自然会问,添上了复数之后所造成的工具,是否足以胜任愉快地解决代数的基本问题,即求出最一般的方程的一个根呢?

邦别利已经知道,利用复数,二次和三次方程是完全可解 [186] 的;换句话说,最一般的二次和三次方程至少有一个根是实数或复数.这是因为这两种方程都具有包含二次和三次根式的形式解.三次方根确实可能带有复数,但是这种方根本身总可以分解为 $a+ib$ 的形式.

因为费腊里方法为四次方程作出了一个类似的解法,这类方程也有可以用复数表示的解,实数解不过是其中一种特殊情况而已.

这些事情在17世纪都已经知道了.同时大家还知道实系数的代数方程的虚根是成对的,就是说,若 $a+ib(b\neq0)$ 是这种方程的一个根,其共轭数 $a-ib$ 必也是一根.因此,奇次方的方程必至少有一个实根.

而在1631年,英国的托马斯·哈里沃特(Thomas Harriot)① 提出了一个巧妙的主意,将方程化作一个多项式,使它等于零;这真是一个高明的想法,因为用了它,哈里沃特就得出了一个定理(我们今日叫作因式定理)说,若 a 是代数方程的一个根,则 $x-a$ 必为其相应多项式的一个因式.这个基本事实将解方程的问题化为分解因式的问题,并且可得出以下结论:若能证明每个方程都有一个根,或是实的或是复的,那么,准此,方程的根的个数就恰等于它的次数;当然这要约定每个根所计算的次数要为多项式中所包括的相对应的因式的次数一样.

17世纪初叶,纪腊尔(Girard)已经猜想,凡对于前四次方程 [187]

① 他逝世于1621年,这里指的是他的遗作.——译者

为真的东西对于一般方程也必为真;到了 18 世纪中叶,达兰贝尔把它整理成一个命题,即:*每一个代数方程至少有一根,实数的或复数的*.然而他还不能够把这个命题加以严密的证明,虽然在他之后有许多人努力来证明它,但在五十年的时间里,它始终是一种假设.

这个断言使人又记起了另一个命题:任何方程都可以用根式来解.我们知道,甚至到了拉格朗日的时代,还有许多数学家把这当作显然的事情.不过这个比较是欠公平的:这里的推广法是属于那种叫作不完全归纳法的类型,而命题之发生错误只是更加显示了这种方法的危险性.至于启发达兰贝尔得出其假设的直觉,那完全是另一回事了.

7

自从达兰贝尔以来,对这一*代数基本定理*的一切证明中,都有这种直觉的反映;这就是,达兰贝尔的不充分的证明,欧拉的不充分的证明,拉格朗日的不充分的证明,阿尔干(Argand)在 1806 年和 1816 年作出的证明,伟大的高斯藉以建立此命题的四个证明,以及后人对于这几个证明的一切修改等.

这许多证明虽则在原理上各有不同,但有一个共同的特点.在某个地方,用某种方法——或明,或暗——总是引进了连续性的观念,它和代数无关,是属于分析学的范围之内的.

让我用一个简单的例子来解释.我们若设 $Z = z^2 + 1$,且设 $z = x + iy$,代入即得 $Z = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$.现在让 x 和 y 以连续的方式变化,而取 $-\infty$ 和 $+\infty$ 间的一切可能的数值,那么括号内的数也必取同样范围内的一切可能的数值.要在一般情况下绝对严密地证明这一点,那是一件相当困难的事;达兰贝尔[188] 的枉费心机,高斯的大显天才,都在这里表现了出来.不过,想到其应当如此,这却是另一回事;这里是*连续性的直觉*大显神通的地方.对于变数 x 和 y 的某些值,两个多项式是正的,对别的一

些值,则为负的.变化既是连续的,那么必有一些 x 和 y 的中间值能使第一多项式为零,而事实上这些中间值有无限多个;另一方面,也有若干组数值能使第二多项式为零.这两类 x,y 之值中必有若干对是相同的.如果 a 与 b 是这样的一对,那么 $a+ib$ 就是方程式 $Z=0$ 的一个根了.这就是数学直觉所提示的,也就是达兰贝尔所要证明的.达兰贝尔失败的地方,高斯却成功了,然而他对这个代数基本定理的第一个证明是根据分析学的原理,这使他一直耿耿于怀.所以十六年后,他另作一个证明.他证明了任一偶次方程可以用纯粹代数方法化成一个奇次方程.如果能证明任何奇次方程至少有一个实根,则基本定理就可以成立了.然而不幸的是,这后一命题不用与纯粹代数无关的东西是不能作出证明的.

8

正因为代数基本定理的证明蕴含着与代数无关的方法,这提醒我们这个定理也许具有更为广阔的范围.事实上也确是如此.在复数域内有一解,这一性质并不是代数方程所独具的.例如 $e^z+z=0$ 这个方程和其他许多超越形式的方程也有复数解. [189]

多项式不过是被魏尔斯特拉斯定名为整函数的一类函数中的极小的一部分罢了.这类函数都像多项式一样,给变数以适当的值,就可使函数值等于任何事先指定的复数值,就中可取 0 为值.许多最重要的超越式,诸如正弦、余弦以及指数函数等,都属于这一类函数.从函数论的观点看来,整函数就是多项式的直接推广.

这就是柯西、魏尔斯特拉斯和黎曼所建立的复变数函数论的基础,这个理论命定要成为 19 世纪数学发展史中的主要因素.

不过还是让我们回过头来说先前的故事吧.

9

在 1770 年,出现了欧拉的代数学,在这书里,提供了复数的许多应用实例.然而,我们也读到:

> "所有此类式子,如$\sqrt{-1}$,$\sqrt{-2}$等等,因而都是不可能的数或虚数,因为它们所代表的是负量的平方根;我们可以确凿断言:这种数既不是无,也不比无大,又不比无小,所以不得不是虚的或是不可能的了."

1831 年,高斯这样地写道:

> "我们的广义算术,其范围远远超过了古代几何,完全是近代的产物.它从绝对整数的观念开始,逐渐扩大其领域.整数之外加以分数,有理数之外加以无理数,正数之外加以负数,实数之外加以虚数.然而这种进步每每在最初时是担心的、徬徨的.早年的代数学家叫方程的负根为假根,当与它们有关的问题是用这样的方式来表达,即所求的量的性质不能有相反的量时,这个讲法的确是真实的.然而,正如分数对许多可数的东西毫无意义可言,而我们却在广义的算术里毫不踌躇地就承认了它一样,我们不应该只因为有无数的东西不许有其相反的量,就否认负数有同于正数的权利.因为在其他无数的场合中,负数也具有合宜的解释,所以它的真实性就得到充分的佐证了.这些事情都早已得到承认了,然而虚量——从前以及现在还偶尔不恰当地叫它作不可能的量,因为它与实量相反对——却还是更多地被看作姑且收用而不那么十分自然之物;它更像是一种空洞无物的符号游戏,即使那些承认它的伟大贡献的人,明白由于这种符号游戏而对实数关系的宝库作出如此伟大贡献的人,也还是毫不犹豫地否认其有可想象的物质基础.
>
> "著者多少年来就从另一个观点来看待这个数学中的极重要的部门,著者以为虚数也和负数一样,可以赋予同样

[190]

的客观存在性，但是直到现在都不曾有发表这个观点的机会."

在这两段话之间的六十年中，究竟出了些什么事，带来了这么大的变化呢？由高斯自己的话里可以找到答案："可以赋予这种虚的东西以一种同样客观的存在性."换言之，对于这种虚的东西已找到具体的解释了，这种解释是和使用相反方向以解释负数相似.

要透彻明白这种解释，我们必需回过头去看一看17世纪，[191] 考察一门学科，这就是我在前几章中再三提到的：解析几何.

10

当我们听到科学使我们的生活发生了巨大的变化时，我们就想到物理学和化学.我们在各种机械的发明中找得出这种大变动的显见证据，这些发明在工业和交通运输上起过革命性的变化.电力的利用减少了家居琐事的苦工，使得人与人之间的交往发展到梦想不到的高度.化学的成就则使以往视为废物的东西变成了我们的衣食、舒适和快乐之源.这一切都教我们敬仰而且惊叹这些科学的成就.

由于扩散太广，数学带给我们的利益则不那么明显.事实上，我们知道，有了数学在理论上发挥作用，然后各种发明才为可能，这些发明的设计也是如此.但是，这是专家们的事.一个人在日常生活中知道水是什么元素合成的，或者长波短波有什么差别，也许会有些用处，然而，几何或微积分的研究，对他的幸福却是不会有多少用处的.

可是，即使在这样一种直接的意义上说，在数学的丰富成就之中，也还是有些东西可以置入有用的发明之列的，因为它们已经深深渗入人们的日常生活中了.在这些东西中，有我们的位置命数法，它使一般人都能从事计算；在这种直接有用的东西中，还有代数的符号体系，特别是维叶塔的逼真算法，它使许多普遍



关系的紧凑形式变得能够自由运用，而不像过去那样只有少数
[192] 人能够理解．归于这一类的，还有笛卡儿贡献于世界的伟大发明，解析图解法，它使我们一眼就可以看出现象所循的规律，或互相依赖的事件之间的相互关系，或某事在某个时程之内所起的变化等等的图形外观．

值得注意的一件事情是：凡最能为群众所了解的数学发明就是在纯粹数学的进展中起着最大影响的数学发明．位置原则产生了零，没有它，负数的概念是产生不出来的；有了它，方程才可能标准化，因式定理才成为可能．字母记号则将数学由研究特殊的问题变化为研究一般的问题；通过给予不可能者以符号，于是就为推广数的概念而铺平了道路．

最后，笛卡儿的发明不但创造出了解析几何的重要学说，并且终于传给了牛顿、莱布尼茨、欧拉和伯努利诸人以一种武器，正是由于缺少这种武器，使得阿基米德和后来的费尔马无法把他们深邃而极致的思想，清楚地表达出来．

11

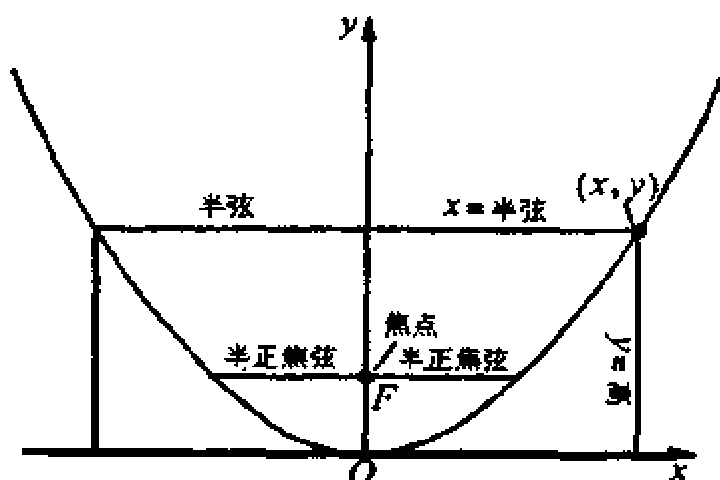
“Proles sine matre creata（不是同一个母亲生的孩子）．”

这是几何学家夏耳（Chasles）描述笛卡儿的成就时所说的话．这种对早先的东西不够公平的态度，同样适用于位置原理和符号记号的发明！前者我们可以回溯到算盘的空行，而后者我们已经知道不过是远古以来数学家和半数学家们所习用的文辞符号体系的进化而已．

同样，伟大的笛卡儿的发明是有其根源的，这见于柏拉图那
[193] 个时代的古代名题中．试图用圆规和直尺来求解三等分角、二倍立方体以及化圆为方等问题的努力都失败了，这就使得希腊的几何学家去寻求新的曲线．他们在圆锥曲线即平面和圆锥体所交的各种曲线：椭圆、双曲线和抛物线面前屡出差错．这些曲线的奇巧性质如此吸引了希腊的几何学家，以致不久之后，他们就

对这些曲线自身的特性进行研究了.伟大的阿波罗尼写了一篇研究它们的专著,其中描述了和论证了这些曲线所具有的最重 [194] 要的性质.

在这篇专著里,我们能找到后来笛卡儿用来建成原理的那个法子的精髓.阿波罗尼以抛物线对向其主轴和顶端切线为框架,证明其半弦是*正焦弦*和高的比例中项.今天我们用笛卡儿方程 $x^2 = Ly$ 来表明此种关系,称高为纵坐标(y),半弦为横坐标(x);*正焦弦*就是 y 的系数,即 L.



乔装的解析几何:阿波罗尼的抛物线研究

意味深长的是,希腊人把这种曲线和他们所发现的其他许多曲线都叫作*轨迹*;就是说,他们把这些曲线看作是对于某种固定参考系有某种可量度位置的所有点的*地位*.例如椭圆就是和两定点之距离之和相同点的*轨迹*.这样的叙述法实际即是此曲线的*文辞方程*,因为它提供了判别准则,使人可以判断任一已知点是否在此曲线上.

在这种意义上,莪默·伽亚谟已经实际用过这种关系了,他用两根圆锥曲线来找出三次方程的图形解答①.这种方法又为文艺复兴时代的意大利数学家以及维叶塔所发展.事实上,就是

① 参看附录14.

由于此种性质的问题才促使维叶塔提出他的逼真算法来的.

最后,我们很有必要看一下费尔马在1629年所写的论文中的一段,这篇论文一直到四十年后方才发表出来,这时笛卡儿的《几何学》已经问世三十年了:

> “在最终的方程中只要有两个未知量,我们总可得出一轨迹,未知量之一的末端会画出一根直线或一条曲线来的.直线是简单的、唯一的;曲线的种类则有无限之多:圆、双曲线、抛物线、椭圆,等等……
>
> “为了有助于方程的概念,最好叫两未知量构成一角,这个角我们将假定等于直角.”

[195]

12

无论怎么说,笛卡儿几何也不会是无母的孤儿.而我更可以幽默地说一句,笛卡儿的概念不但有一位令堂——即希腊的几何——而且还有一位孪生昆仲.的确,我们即使只对笛卡儿的《几何学》和费尔马的《引论》作一个浮光掠影的研究,也可以看出数学史中不胜枚举的孪生现象又一个摆在我们的眼前.在同一个世纪,说得更切实一点,在同一个世代,我们还有着德沙格(Desargues)—巴斯伽发明的投影几何,有着巴斯伽—费尔马发明的或然率数学原理.可是这种现象绝不限于17世纪.在18世纪有着牛顿和莱布尼茨的偶合;19世纪目睹了韦塞尔(Wessel)、阿尔干和高斯约莫同时给出的复数的解释;以及罗巴契夫斯基(Lobatchevski)、波约(Bolyai)和高斯几乎同时得出非欧几何的概念;该世纪的末叶,又有康托尔—狄德金所系统表述的连续统.

在别的科学中也有同样的例子.同一概念会几乎同时浮现在两个人或几个人的脑海中.常常是各人相隔数千里,属于完全相异的国籍,甚至彼此互不知道对方的存在;笛卡儿和费尔马这两个人的性格、环境和观点的悬殊,更是令人惊异.我们怎样来

解释这种奇事呢？这仿佛是民族的长年累月的经验蓄积起来，到了某个时候，不得不有所发泄，究竟是由一个人或两个人或一群人来汇集这种富饶的财富，那却完全要碰机会了. [196]

13

不论是费尔马或笛卡儿，都不曾认识到他们发明的全部意义．两人的目的都只在创造一种几何中的统一原理：费尔马从纯粹数学的立场出发，笛卡儿从哲学的立场出发．希腊的几何，其最高表现是欧几里得和阿波罗尼的巨著，其中尚不曾含有这种统一性：每一个定理，每一个作图，都很像一件艺术的创造，而不太像某种普遍原则的应用．至于隐藏在这一个或那一个作图题后面的观念究竟是什么呢？为什么有些题目只用直尺就可以作图，有些则兼要圆规，还有些却甚至不是尺和圆规的主人——希腊人的天才们所能招架的呢？就是这些和这类问题，激动着那个时代的数学名家，其中包括费尔马和笛卡儿.

他们在代数里找到了线索；于是他们把几何学代数化，结果就是解析几何．他们将几何的任何问题都化成代数的非常普通的操作方法，由此而奠定了他们方法的基石．这样，古代的名题，那些开始带有传奇色彩中的名题，在各时代中为数学家幻想之源的名题，被笛卡儿一扫而清，他依据事实断言：任何问题若引出一个一次方程，则只用直尺就可以作出几何解答；若是二次，则可用直尺和圆规作得；若是高于二次的不可约方程，则其几何 [197] 解法就不是只用直尺和圆规所能胜任的了.

14

笛卡儿（自然费尔马也是如此）并未想到他已奠定了一门新数学的基础；他率直地说，他的目的只在将古代的几何系统化罢了．这实在是17世纪在数学史上所扮演的角色：它是古代数学文化的清理时期．我从伽利略（Galileo）、费尔马、巴斯伽、笛卡儿

以及其他人的著述中看到了一个历史过程的终结，而这，在一个普遍衰微的时代中是不可能达到它的高峰的.罗马人的漠不关心和漫长的黑暗时代的宗教蒙昧主义，阻止了这个进程的继续竟达一千五百年之久.

在扫清了古代数学的断砖残瓦的同时，这些人的天才为新数学铺平了道路.近代数学思想的主要特点就是*固本原理*和*对应原理*.前者产生了广义的数概念，后者则能建立那些表面上似乎很远或很不类似的概念之间的亲属关系.虽则笛卡儿对近代数学的这两种基本原理连含糊不清的了解都未必具有，可是他的解析几何却包含了发展这些原理的一切要素.

这是一种代数，它暗自承认了无理数和有理数的完全平等.它被使用于古典几何问题：这种代数用直接的和系统的方法，得到了和希腊人——他们信守极端的严格性，同时由于畏惧无限和无理数而受到限制——用精巧而无系统的方法所得到的同样的结果.这种事实本身就给了笛卡儿的演绎方法以一种惊人的[198]实用力量，因为没有什么能比成功更能说明问题了.

其次，*算术*和*几何*这两个数学中的分支，不但其本性相差极远，而且我们知道，从有数学以来，它们就是直接对抗的，解析几何则在历史上第一次使这两者建立了亲属关系.至于它们互相对抗的一面，费尔马、笛卡儿及其同时代人并不十分清楚，不过在其后二百年中，它却注定了要在数学思想的发展上起到极为巨大的影响.

前章已经说过，笛卡儿暗中假定了一条固定轴上的诸点和实数之间的完全对应.但他所假定的还不止于此：他隐含地（因为看来太自然了，似乎根本用不着去说）承认了*平面上的点和实数对的集合间有完全的对应*为公理.这样，推广到二度空间上的康托尔—狄德金公理，早在康托尔和狄德金两人出世之前二百年所创立的一门学科中就已经不声不响地大显身手了.这门学科又成了尔后二百年来一切成就诸如微积分、函数论、力学和物

理学的试靶场.无论什么地方,这门学科(解析几何)都不曾遇到矛盾;不论用到什么地方,它都显示出它那提出新问题和预示结果的威力,这就使得它很快地成为研究工作中不可或离的工具了.

15

取两根垂直的轴,各给以一个正向,则在两轴所存在的平面上的各点都可以用两个数作表示.每个数都可以是正,是负,是零,是有理,是无理.这些数就是已知点对于标准轴的距离的测度,再依点在轴所定的四个象限中的某象限,而在数前面附以正号或负号. [199]

这个原理如此简单而又自然,以致我们很难相信人们需要三千年之久的时间才能发现它.这个现象和发明位置命数法原则时出现的现象是同样地令人感到奇怪的.后者暗中包含在我们数的语言的结构中,但它却需要五千年之久才被发现.前者是我们躯体的对称构造的一个直接推演,并且从远古以来就用来描述物体的相对位置.这似乎只消在右与左、后与前、上与下等观念之上给以量的意义就可得出一个十全十美的坐标几何了.

而且我们发现这个原则在很早时代就已经应用了;我们在古代神话中找到了它,神话中描述宝藏的所在地时,常是教寻找的人先东行若干步,再北行若干步;我们还知道埃及的测量家是明明白白地应用了它的,他们先决定了一条南北线和一条东西线,别的位置就以这两轴作为依据.

要从这种实用的程序进到解析几何,自然需要有零和负数概念创造出来.然而欧洲从菲波纳契时代以来就已经知道这些了.那么为什么坐标原理,数学家不能较早一些想出来呢?答案可以从希腊人的见解在欧洲思想上所发生的严重影响中找到.要将数从希腊人所加上的约束中解放出来,这事不像我们今天所看到的那么容易.

[200]

16

笛卡儿几何对平面上每一点给出两个实数,并使每一对实数定出平面上的一点.它把实数对的集合和平面上的点看作是同样的.从这里只要再进一步,就可以把点看作单个的数了.然而这也差不多经过二百年才走上了这一步.

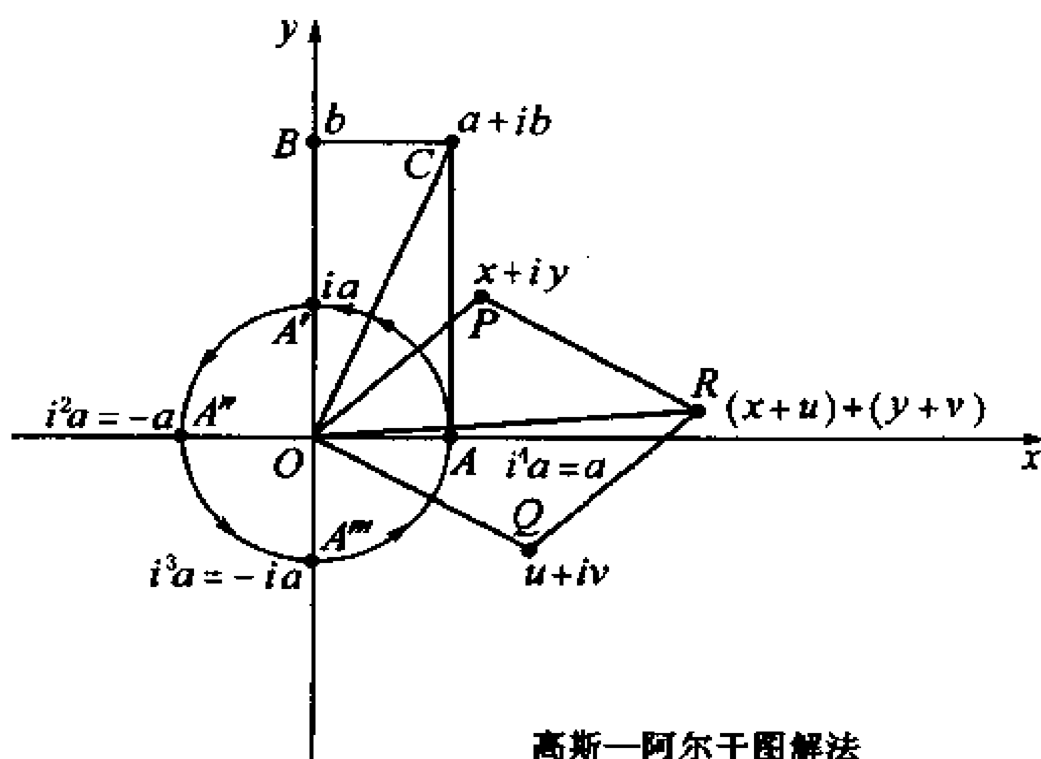
1797 年,挪威一位无名小卒,一个名叫韦塞尔的测量员,把一篇关于复量的几何解释的报告送到丹麦科学研究院.这篇报告没有引起人们的注意,一百年之后,它才在科学界为人所知.也是在 1797 年,二十岁年纪的高斯为他的博士论文作答辩,题目是代数的基本定理,他在这里也暗暗运用了复数域的几何解释法.在 1806 年,一位不为人知的在巴黎作管帐的瑞士人罗伯特·阿尔干发表了一篇短文,论及复数的几何解释法.这篇文章也是无声无臭地过去了,直到十年之后,才转载在一本著名的数学刊物上.最后,在 1831 年,高斯在前面已引的论文里,更详尽地系统表述了平面笛卡儿几何与复数域数学的等价性.

依照这个表述(它大体和韦塞尔和阿尔干的相同),一个实数代表笛卡儿图解中 x 轴上的一点.设 a 是这样的一个实数(见下页图),而 A 是它在 x 轴的代表点,则用 i 乘之,就等于将向量 OA 依反时针方向转一直角;所以 ia 这个数就用 y 轴上的 A' 点代表了.若再乘以 i,我们即得 $i^2a=-a$,而其代表点 A'' 又在 x 轴上了,由此类推.依次连转四个直角,该点就回到它的原

[201]

来位置.这便是第 156 页所提到的关系式的几何意义.

再者,加法 $a+ib$ 以两个向量 OA,OB 的合成向量来表示,此 A 是实数 a 的代表点,B 是纯虚数 ib 的代表点.于是 $a+ib$ 代表了以 OA,OB 为边的矩形的对角线之末端 C 点.所以复数 $a+ib$ 相当于笛卡儿图解中横坐标为 a,纵坐标为 b 的点.



高斯—阿尔干图解法

P 和 Q 所代表的两个复数的相加，等同于将向量 OP 和 OQ 用平行四边形法相合.用一个实数相乘，例如 3，那便是将向量 OP 伸张 3 倍.乘以 i，就是依反时针方向旋转一直角，如此等等.

运算的详细情形如上图所示.

17

这种具体解释的发现使得邦别利的幽灵变得有血有肉了.它从复数里除去了虚象(Imaginary)而代以一种形象(Image).

这一点，以及当时得出的另一个证明：凡代数方程及范围更大的超越方程，皆在复数域内有解，这二者在数学上引起了一个真正的革命.

在分析学的园地里，柯西、魏尔斯特拉斯、黎曼和其他诸人将无限算法的整套工具推广到复数域.复变数函数论就这样地建立起来了，并且引出它在分析学上、几何学上和数学物理上的

一切深远的结果.

[203] 在几何的园地里,彭色列、冯·斯陶特(Von Staudt)和其他诸人从复数出发建立了一般投影几何学;罗巴契夫斯基、波约、李(Lie)、黎曼、凯雷(Carley)、克莱因(Klein)及其余许多人又开辟了非欧几何的广阔园地.将复数应用于无限小几何上,终于产生出了绝对微分几何,这又是近世相对论的基础.

在数论里,库莫尔发明了复因子的方法,他把这种数称为理想数,由此,就把费尔马问题以及其他有关的问题推进到梦想不到的阶段.

18

这种惊人的成功鼓舞着推广工作的开展:这可以从两方面来进行.第一方面所考虑的问题是:复数单位能不能不用 $i^2 = -1$而用别的法则呢? 关于这方面的工作做了不少,不过它与这里所考察的内容却没有什么特别的关系.第二方面,人们自然要问,是否三度空间的点也可以当作单个的数来看待呢? 从这个问题里生长出了一门新的学科,它终于变成了今天的*向量分析*,这在近代力学中起着十分重要的作用.这个问题还有另一产物,这就是汉密尔顿创立的*四元数理论*和与之有关的格拉斯曼(Grassmann)的*广义数量理论*.

这些推广揭示出一个重要的事实,就是,当推广到复数域以外时,*必须牺牲固本原则才有可能*.复数域便是此原则的最后疆界.要超出这个疆界:或者是运算的交换性,或者是零在算术上所起的作用,二者必定要牺牲其一.

[204] 这就不得不对一般运算的性质加以考察了.于是,固本原则被剔去某些限制后再次推广.结果建立了一个深远的关于*矩阵*的理论,这个理论是把一大阵的元素当作单个数来看待.这种"八宝箱"可以相加,可以相乘,矩阵的全套计算法业已建立起来,它可以视为复数代数的推广.这个抽象的东西最近已经在原

子的量子论以及其他科学领域中找到了很好的解释.

19

这就是复数量故事的梗概.几世纪以来,它表现为理性和想象之间的某种神秘的结合.莱布尼茨这样说过:

> “圣灵在分析学这个奇迹上,在理想世界这个怪物上,在存在与非存在之间的这个两栖类上,找到了一条绝妙的出路,我们称之为 -1 的虚根.”

被某些人看作一种空洞的符号游戏的复数,由于某种莫明其妙的原因导出了种种真实的结果.因为它们有用,这才保证了其存在的正当理由,正如手段之为目的作辩护一样.对于一些用别的方法解决不了的问题,复数常能供给方法,并且预告其结果.所以这些幽灵鬼怪常常成为人们召唤的对象,然而总是不免担忧.

接着终于到了这么一天,人们证明了邦别利的鬼怪不是真鬼怪,证明了它和任何实数的存在一样地具体.不但如此,这种复合的存在物还是一种双重存在:一方面,它们服从算术上所有的规律,因此它们是忠实的数;另一方面,它们又是平面上的点的完整的化身.所以,它们是一种很合乎理想的工具,适于把平 [205] 面上的图形之间的复杂的几何关系变换成数的语言.

这一点实现以后,几何算术化这件事便由费尔马和笛卡儿无意识地开其端,而今功德圆满了.于是,复数这个东西,其开端是给幻想以一个符号,结尾却成为数学观念的系统整理所必不可少的工具,成为解决繁难问题的有力手段,成为对相离甚远的一些数学分支找出其密切关系的一种方法.

格言:假想是一种寻求解释的形式.

[206]

第11章 无限之解剖

"数学之精髓在于它的自由."

——乔治·康托尔

1

要计量一个无限集合的多寡,初看起来,似乎荒唐.然而即使是对于数学观念最不熟悉的人,也会隐约地觉得有各种各样的无限——用于自然数序列的无限这个术语和用于直线上的点的无限这个术语,是有着根本的不同的.

我们对于无限集合的"内容"的这种模糊观念可以比作一张网.设想我们撒下去的网,网眼的大小的单位为1,则可以将一切整数捞出来,别的数都漏了过去.回头再用第二张网,其网眼为$\frac{1}{10}$;再次用一张网眼为$\frac{1}{100}$的网;这样下去,我们依次可以得出越来越多的有理数.我们可以假想这种改进过程是无止境的,因为不论是撒出一张如何密的网,总还能有一张网比它更密.若让你的幻想如野马般自由奔驰,你可以设想一张超终极的网,它是如此之细密,其网眼如此之微小,以至于可以捞出一切有理数.

如果我们将这种比拟推到极端,并开始把这种极限的网看作某种固定的好像是冻结了的东西,这么一来,我们就能将芝诺巧妙地提出的困难完全解除.不过,在这里,我们又遇着了新困难.

[207] 这张超终极的有理网,即令能够制成,也不足以捞出一切

数.我们还需要一张更"密"的网以供打捞代数的无理数;何况这张"代数的"网仍然不能把超越数捞出.因此,我们的直觉观念是:有理数域比自然数域更密;而代数数域又排列成一种更紧密的结构;最后,实数域即算术连续统乃是超密的介质,没有间隙的介质,一张其网眼为零的网络.

这样一来,假如我们第一次听到康托尔真的做过一次把无限集合加以分类的尝试,对每个无限集合都赋予一个数以代表其多寡,我们自然就会预期他已经成功地找出一个计量这种种不同紧密性的度量了.

正因为我们有这样的预期,所以康托尔的成果将有许多会使我们惊异的东西,其中有些简直奇怪得近乎荒唐了.

2

想用网眼的办法来计量一个集合的紧密程度,这注定是要失败的;原因是网眼原则上是物理的,而不是算术的.它之所以不是算术的,因为它不是建筑在一切算术所依据的对应原则之上.实际无限的分类,即无限集合的多寡性的各种类型的分类,如果该分类可能的话,必须依据有限集合的多寡性的分类所依据的路线而进行.

我们在开头的一章里就知道了绝对多寡性的观念并非人的头脑固有的能力.自然数的产生,或者更恰当些说,基数的产生,可以回溯到我们的比配能力,它使我们能够建立集合与集合之间的对应性."大于——等于——小于"的观念是先于数的概念 [208] 的.我们先学习了比较然后才学习求值.算术不是开始于数,而是开始于判别.既学会了使用这种大于——等于——小于的判别准则之后,人类的第二步便是作出各种型式的多寡性的模范.这些模范深藏在人心中,正如标准米突尺之藏在巴黎测量局一样.对于一、二、三、四、五、……,我们可以同样地用:我、双翼、苜蓿叶、兽蹄、手、……,而且,就我们所知,后者产生于我们现有的

形式之先.

对应原则产生了整数并通过整数而统治了全部算术.现在,用同样的方法,在我们能够计量无限集合的多寡性以前,我们必须先学会比较它们.如何比较呢?就用比较有限集合时所用的同样的方法.匹配法,这个在有限算术中已经作出如此显著成绩的方法,现在可以推广到无限算术之上了:因为两个无限集合的元素也是可以一一匹配的.

3

建立两个无限集合之间的对应关系的可能性,在伽利略的一段对话中可以见到,这是无限集合问题的第一个历史文件.我从一本1636年出版的题为《关于新科学的对话》的书中逐字录出这一段.对话的参与者共三人:其中,萨格列多(Sagredo)代表实用主义者,辛普利契奥(Simplicio)受过经院方法的训练,而萨尔维阿蒂(Salviati)显然就是伽利略本人.

[209] 萨尔维阿蒂:当我们试图用我们有限的心智来讨论无限时,所发生的困难之一,就是假定它有我们给与有限的和有穷的那些性质;我以为这样作是错误的,因为对于无限的数量,我们不能说两个中孰大孰小或相等.要证实这一点,我心中已有了一个论证,为了简明起见,我将用问答的形式和辛普利契奥讨论,困难是由他提出来的.

我假定你们都知道了什么数是平方数,什么数不是.

辛普利契奥:我很知道平方数就是由一个数自己相乘而得出的数;所以,由2,3等各自自乘而得出的4,9等就是平方数.

萨尔维阿蒂:对了.你们也知道,就因为这种乘积叫作平方数,所以其因数就叫作边或根了;反过来,若乘积没有两个相等的因数,它们就不会是平方数了.因此,假如我说所有平方数、非平方数总括起来要比上举的平方数为多,我

说的乃是真理,对吗?

辛普利契奥:那是一定的.

萨尔维阿蒂:如果我问有多少平方数?人家就可以确确实实的回答说,和相对应的根的数目是一样多的,因为每一个平方数都有它自己的根,而且每个根也有其自己的平方数,而且没有一个平方数有一个以上之根,也没有一个根有一个以上之平方数.

辛普利契奥:当然是这样的了.

萨尔维阿蒂:但是如果我问有多少个根呢?你不能否认它的数目和数一样多,因为每一个数都是某平方数之根.承认了这个之后,我们必须说,有多少数就有多少平方数,因为有多少根就有多少平方数,一切的数都是根.然而我们先头说过,数是比平方数多的,因为数的大部分都不是平方数.不但如此,平方数和数的比例是越到大数则越小的.例如到一百,我们有十个平方数,即全数的十分之一;到一万,只有一百分之一是平方数;到一百万,只有千分之一;然而从另一方面来看,在无限数中——如果我们能够想象这样 [210] 一个东西的话——就只好承认平方数跟全部总括起来的数是同样多的了.

萨格列多:那么在这种情形之下,我们只能得出甚么结论呢?

萨尔维阿蒂:就我所知道的,我们只能说平方数是无限的,其根数也是无限的;我们不能说平方数比一切的数少,也不能说后者比前者多;说到底,"等于"、"大于"和"小于"诸性质不能用于无限,而只能用于有限的数量.

于是,当辛普利契奥拿出几段长短不同的线,并且问怎么能够说长的不比短的有更多的点时,我就告诉他说,一段线不比另一段线有更多的,或较少的,或同样多的点,而是每一段线都含有无限个点.

4

伽利略的悖论显然在他的同代人中不曾留下什么印象.以后二百年中,人们对于这个问题什么贡献也没有.接着,到了1820年,有一个布尔查诺(Bolzano)出了一本德文小册子,题目是《无限的悖论》,这本小册子同样地又没有引起人们的注意.的确,如此少的人注意它,以至五十年后,当集合论已成当代的谈论中心时,几乎没有数学家知道这位布尔查诺是谁.

到了现在,布尔查诺的贡献只有纯粹的历史意义了.他确实是提出实际无限的第一个人,不过他的进展不算很大.然而,我们实在应该对这位创造了集合的势这名词的人表示应有的敬意,这是一个极其重要的概念,我马上就要谈到.

近代的集合论起源于康托尔.他为这个新数学分支奠定基础的论文发表于1883年,题为《论线性集合》.这论文是把实际无限当作确定的数学实体来处理的第一篇文章.下面的一段是由该论文中引来的,它清楚地说明康托尔是如何理解这个问题的:

[211]

> "我们传统上把无限看作无限制地增加或是与之密切关联的一个收敛序列的形式,这是17世纪所取得的.与此相反,我把无限理解为具有某种完成了东西的确定形式,是某种不但能有数学表示而且可用数来定义的东西.这种无限的概念是和我所珍视的传统相违背的,和我自己的愿望更相违背,我是被迫接受这种观点的.可是多年的思考和尝试,指明这种结论是逻辑上的必然,由于这个原故,我自信,没有什么持之有据的反对意见是我所无法对付的."

5

要理解这种公开和过去传统决裂的巨大勇气,我们必须先懂得康托尔年代中大家对于实际无限的普遍态度.为了这个目

的,我这里引用一段伟大的高斯写给舒马赫(Schumacher)的信,这信虽然写于1831年,可是已经定下了后五十年数学界的调子了:

"至于你的证明,我不得不极力反对你把无限当作一种完成的东西来使用,因为这在数学上是决不能承认的.无限只不过是言语上的一个比喻;是一句陈述语的简略形式,就是说,有极限存在使得某些比例数能够任意地接近它,而其他量则可能增长到超越一切界限.……

"……只要有限的人不误把无限当作某种固定的东西,只要他不凭藉心灵中后天的习惯而把无限看作某种有限制的东西,那么就不会出现什么矛盾的."

[212]

高斯对于这个问题的思想在当时是很普遍的,所以,我们可以想象,康托尔的公开挑战会在正统派的营垒中引起一种什么样的风暴了.这不是说,实际无限在康托尔的时代就从未在各种乔装状态下被使用过,而是说,对于这种事情,传统的态度是和南方绅士①对于通奸的态度一样:他宁可做出那种事情,而不愿在一位女士面前迸出这个字来.

幸亏康托尔的深思熟虑已经使他充分坚强,足以应付这场恶战,因为在未来多年的时间内,他必须孤军战斗.这是一个什么样的战斗啊!在数学史上从来也没有记录过如此激烈的场面.集合论诞生时所遇到的风暴,表明了人类的激情即令是在数学这样抽象的领域里,也是不能完全消泯干净的.

6

康托尔是从伽利略撒手之处着手的.是的,两个无限集合间的对应是可以建立起来的,甚至其中一个是另一个的一部分也可以!所以,为明晰起见,若两个有限的或无限的集合,其元素

① 美国南北部相讥诮的称呼.——译者

可以一一匹配，则我们称之为等价，或者叫作有相等的势．若两个集合的势不等，则匹配法可使一个集合配尽而另一集合还余下一部分未曾匹配的元素．换句话说，前者可以用后者的一部分来匹配，而后者却不能用前者的任一部分来匹配．在这种情形之下，我们说第二集合之势比第一集合为大．

设(A)和(B)是两个有限的集合，其所含的元素数目相等，[213] 则显然它们有相等之势；反之，若(A)和(B)是等势的有限集合，它们必定也有相同的基数．若(A)和(B)的势不等，则势大的也有较大的基数．所以在有限集合中，势的概念和基数的概念实在是一件事．既然在有限算术里，势这个名词和基数是二而一的东西，自然就可以问，我们是否可以把无限集合的势也作为一种高级的数，即所谓超限数呢？是否可以用这新概念以创出一种超限的算术，即无限的算术呢？

如果我们循着有限算术的起源所提示着的路线走，我们必须先找出一些模范集合，每个模范集合代表着某种典型的多寡性．这样的模范集合是现成的：自然序列、有理域、代数数域、算术连续统——所有这几种无限集合业已被我们不断使用而十分习熟了，现在正好用它们来作比较的标准．现在让我们给这些标准集合以符号，使这些符号在超限算术中所起的作用就和它们的对应物1，2，3，…等有限基数在有限算术中所起的作用一样．

康托尔把这些符号称作超限基数．他依势的大小把它们排成一个“序列”；他规定这些抽象物的加法、乘法和乘方；他指明了这些东西如何自相结合，又如何和有限基数结合．总而言之，康托尔的天才所创造出的这些虚幻的生灵具有如此之多的有限数量的性质，我们真好像应该给它们以“数”的称号才是．然而有[214] 一个最最重要的性质却是它们所没有的，这便是有限性．这后一陈述听起来像是多余的，然而这并不是有意去说废话．下面我就要提出的所有自相矛盾的命题，都是因为这些数学实体虽然有了数的全副仪表，但却少了普通数的一些最根本的性质而引起

的.这个定义最惊人的结果之一是:一个集合的部分并不一定比全部小:它们可以相等.

7

一部分可能有全体之势,这句话与其说像数学,还不如说像神学.我们确实知道,真有许多神学家或准神学家玩弄过这个观念.梵文祈祷书是宗教心旷神怡地和哲学、数学以及性教育相混合着的大杂拌,书里的上述观念更是常见的.所以婆塞羯罗在思考数字$\frac{1}{0}$的性质时说,它"像无限、不变的造物者一样,在旧世界毁灭或新世界创造的时候,在无数种类的生物生生死死的时候,凝然不变."

"部分具有全体之势."这句话就是伽利略的悖论的精髓.可是伽利略避开了这个论点,却宣布说:"大于、等于、小于诸性质不能用于无限,而只能用于有限数量."康托尔就拾起这个论点,当作他的集合论的出发点.

狄德金走得更远:在他看来,一切无限集合的特性正在于其一部分可以与全体相匹配.为作例证起见,设想一无限的序列排列了起来并且依次标了号.然后在开头弃去任意有限多个项,再把这缩短了的序列重新标号.这样,第二序列中的每一项都和第一序列中同样等级的一项相当,反之亦然.所以两序列间的对应是完全的,并且具有同样的势;然而我们不能否认第二序列实在是第一序列的一部分.这种现象只有在无限集合中才有可能,因 [215] 为有限集合的唯一特性就是部分绝不等于全体.

8

我们再回到康托尔的理论.设以符号 a 表示自然数集合的势.凡是具有势 a 的集合都叫作可数的.伽利略推论中所使用的完全平方数的序列就是这样的一个可数的集合.不过其他的所有

序列也都是如此的，这完全是因为我们对于每一项都能给与一个等级，因之该序列跟自然数之间就有着完全的对应性．偶数、奇数、任何算术级数、任何几何级数、总之，任何序列，都是可数的．

更进一步，设想从自然数域中取去任何这样的序列，其余下的集合仍旧是无限的，仍旧是可数的；这就是用这种消去法以降低一个可数集的势之所以没有希望的原因．譬如说，我们可以从自然数域中取去一切偶数，再取去一切三的倍数．再取去一切五的倍数．我们可以继续此法以至于无穷，而依旧不致影响其势．

用康托尔的说法就是，没有小于 a 的超限数，这个 a 乃是可数无限集合的多寡的计量标准．

但是，虽然没有希望用消去法从自然序列中得出一个更小的超限数，那么是否能用一种添补法来增加其势呢？真的，处处[216] 稠密的有理域，好像该比疏散的自然序列具有更大的势吧！这里直觉又骗了我们，因为康托尔已经给我们证明了，有理集合也是可数的．要证明这个，只消证明有理数可以自己排列起来成为一个序列，而每个有理数都可以指定一个特定的等级就够了．这就是康托尔实际上所作的．我们可以通过从几何角度来考虑这个问题而得到这个方法的一般概念．

在下面附图里我们有两组互成直角的平行线．在水平的诸平行线中，每根给它一个整数 y，y 取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切整数值；同样，每根垂直的平行线也给它一个整数 x．现在，我们将这无限个格子的角顶标号，用其相交的水平线和垂直线的两数作标号．这样，符号 (y, x) 就定出格子的某一固定的角顶，而反过来每一角顶点也必有这样的一个表示法．

现在我们要证明这些角顶的全体构成了一个可数集合．要证明这件惊人的事实，只要画出如图所示的螺状折线，再依各格子角顶所出现的顺序定其等级就得了．

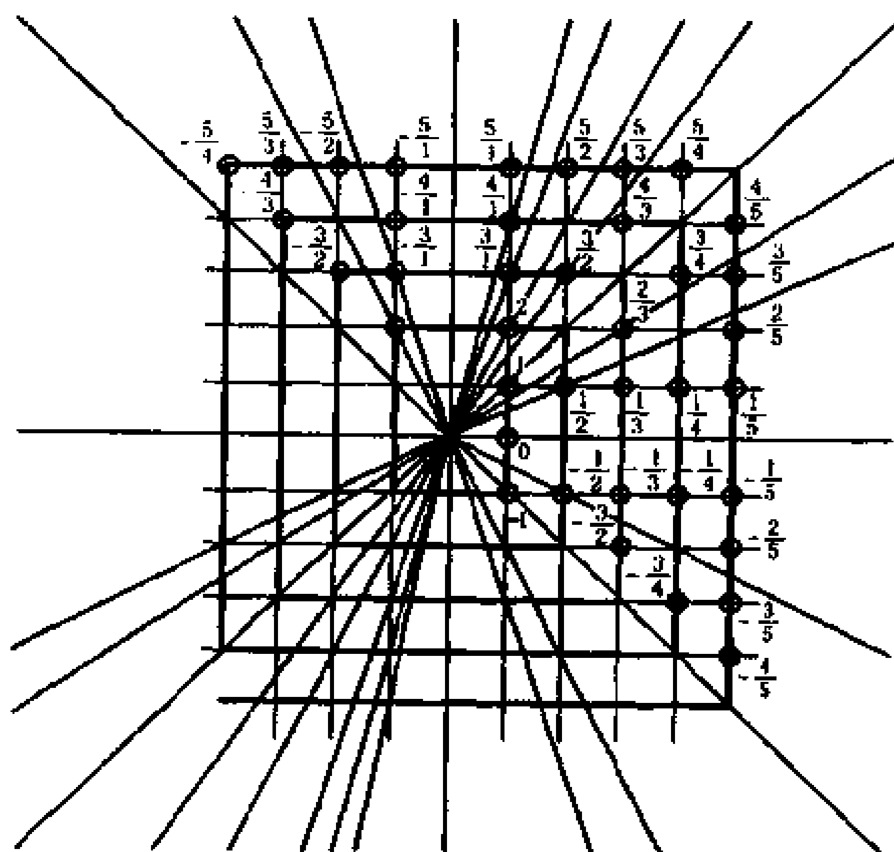
另一方面，我们可以将符号 (y, x) 当作分数 $\frac{y}{x}$．但若如此

作，我们显然不能用彼此不同的有理数来给一切格子角顶标号了．事实上，很容易看出来，位于通过原点的同一直线上的一切角顶都代表同一个有理数．要免除这种不确定性，我们规定每个分数只算其初次遇见的一个．这些点构成了序列：

$$1,0,-1;-2,2,+\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2},-3,+3,+\frac{3}{2},+\frac{2}{3},$$

$+\frac{1}{3},\cdots$（见下图）．

这样，全体的有理数都表示出来了，而且每一有理数在序列中只出现一次．所以，有理数域是可数的． [218]



有理数域的计数法

9

然而读者可能忍不住要说，这和我们关于紧密的概念正相

矛盾.依照我们的紧密概念,有理数是没有其后继一数的.在每两个有理数之间,我们可以插入无限个其他的有理数;但是在这里我们却真正建立起一种次第系统来了!对于这个问题的回答是,虽然我们这里得出的的确是一种次第系统,然而它和自然数1,2,3,…的次第基于大小的顺序,不是属于同一类型的.我们之所以能把有理数枚举成功,正因为在新的排列中我们不固执着大小的顺序.我们牺牲了连续性,得到了次第性.

我们知道现在要紧的是把两种等价性加以分别.从对应的观点看来,两个集合的元素若能一一匹配,就是等价.从顺序的观点看来,这也是不可少的.但若要完全等价,或者说,若要具有相似性,则必须加上一条,这匹配法必须不破坏排列的顺序;就是说,若在集合(A)中,元素 a 在元素a'之先,那么在集合(B)中,其相应的元素 b 也须先于元素b'.依大小排列的有理数集合和我们按螺旋折线排列使之为可数的有理数集合,从对应观点看来是等价的,但从顺序观点看来则否.换句话说,它们具有相同的基数 a,但是序型不同.

所以康托尔创出了一种序型理论,它表现为有限算术中的[219] 序数的翻版.不过,从前的序数有这样的基本性质,即任何两个集合的基数若相同,则序数也就相同,正为这点,我们才能很容易地进行相互变换.然而在康托尔的无限算术里,两个集合也许可以用同一个基数来计量,但是在序数上是不同的,或者如康托尔所说的,不相似.

10

因此,单是紧密性本身并不妨碍可数性,而添补法也和消去法一样丝毫不影响到集合的势.于是我们在某种程度上对康托尔的次一个推论就不太惊诧了;这个推论说:代数数的集合也是可数的.康托尔的这条定理的证明实在是人类天才的胜利.

他开始先给他称为方程的高下了一个定义:高就是方程的

各系数的绝对值之和加上方程的次数减一.例如方程 $2x^3-3x^2+4x-5=0$,其高 $h=16$,因为 $2+3+4+5+(3-1)=16$.

他第二步证明,以任一正整数 h 为高的方程的个数是有限的.这就可以教我们将一切的代数方程依其高的递增来分组;我们可以证明,高为一的方程只有一个;高为二的有三个;高为三

已经知道,想把一切实数排成一种可数序列是不可能的.至于其证明却到 1883 年才给出.我不能细述证明的详情,其大体原则[221] 是假定一切实数已经排成某种系列,再用一种我们今日叫作对角线法的方法证明,还存在着另外一些数,它们既是实数,可是又不包括在已可数的系列之内.

这个证明有一个间接的启示,它具有重要的历史意义.读者还记得柳维勒对超越数的发现吧.柳维勒的这一存在定理,现在又作为康托尔的"连续统不可数的"定理的一个副产品,重新建立起来了.代数域和超越域二者之间相对的丰富性,对于柳维勒只有一种含糊的意思,而今却为康托尔十分严密地表述出来了.他证明代数数域具有自然数集合的势 a,而超越数却具有连续统的势 c.这样,超越数较之代数数多得不可比拟这个争论到此就获得了真正的意义.

在这里,在实数域内,部分也是可以和全体有同样的势;用伽利略的怪话来说:"长线不比短线有更多的点."事实上,一个线段,不论其怎么短,都与无限长的线有相等的势;一块面积,不论其怎么小,都具有整个平面的势;一定体积,不论其怎么小,都具有三度无限空间的势.总而言之,分割和合并,也跟消去和添补一样,不会影响一集合的势.

12

在这点上,我们的直觉又悄悄地在提示了.下列各种高维流形的情形又怎样呢:平面上的点集合所表示的复数域;空间内的各点;向量和四元数;张量和矩阵;以及其他的繁杂复数,数学家[222] 已经把后者当作单个的数,它们遵从数的运算规律,但又不能像直线上的点那样地在连续状态下来表示.这些流形当然要比线连续统有更高的势吧!在三度空间中,在四面八方无限伸延的宇宙中,当然总比一英寸长的直线有更多的点吧!

这可能也是康托尔早期的思想.不过他结果证明直觉在这

里又骗了我们.二度或三度空间的点的无限集合,甚至依赖于三个以上(实际可为任意多个)变数的数学实体,其势也仍然不大于线连续统的势.不但如此,假如我们能够想出一种变化的东西,它在每一瞬间的状态都依赖于无限多个独立变数,就是说,一个"住在"可数无限度空间的实体,这种实体的全体,也不比直线连续统有更大的势,同时也不比一英寸直线有更大的势.

这种说法可真使我们惊异,它如此直接地和我们的大小观念相矛盾,以至于近乎荒谬.在康托尔首次发表它时,的确许多人都这样想,有许多第一流的思想家,至少也是非常诚惶诚恐地来接受它.但是康托尔对于这个基本命题的证明是这么简单,甚至聪明的小孩也能明了.

我将就平面上的点来说明这个命题:读者可以看出这种论法具有完全的普遍性.因为其长为1的线段和无限长的直线有同样的势,又边长为1的正方形和无限大的平面有同样的势,那么我们只要证明这线段和这正方形之间能建立起一一对应的关系就够了.

现在,附图中 $OAFB$ 正方形内任一点 P,我们知道是可以用两个坐标 x,y 表出的.这两个数都是实数,而且不大于1,所以都可以写成小数.这两个小数都可以看作是无穷的,因为即使是有穷的小数,也可以在最后一位有效数字后加上无数个零而变 [223] 为无穷的.假设我们将这两个小数写成下列形式:

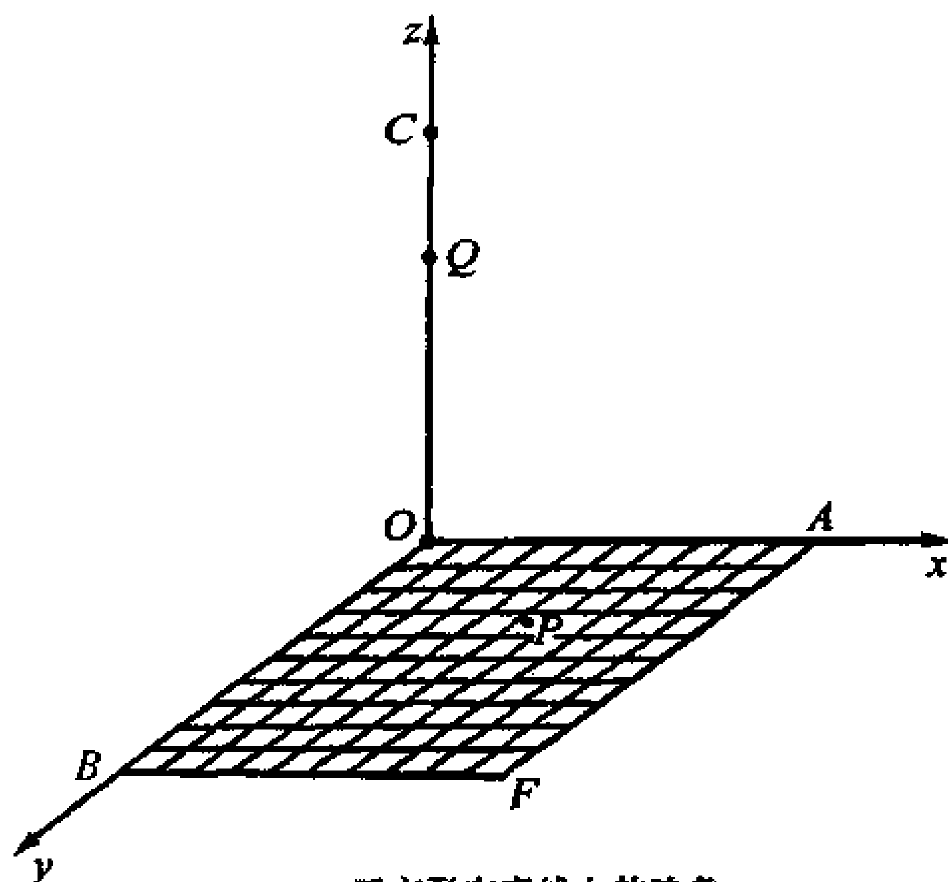
$$x = 0.a_1|a_2|a_3|a_4|a_5|a_6|\cdots,$$

$$y = 0.b_1|b_2|b_3|b_4|b_5|b_6|\cdots.$$

然后我们作出第三个小数 z,轮流插用 x 和 y 的数字,即, [224]

$$z = 0.a_1|b_1|a_2|b_2|a_3|b_3|a_4|b_4|\cdots.$$

这个小数也是一个实数,我们可在 OC 线分上用一点 Q 表出.这样 P 和 Q 所建立的对应是可逆的和唯一的;因为若已知 x 和 y 便能够作出且只能作出一个 z;反之若知道 z,也可以得出 x 和 y,因而得出点 P.



正方形在直线上的映象

13

在它们之间是什么呢？在它们以外，又是什么呢？

在康托尔的理论中，并没有任何东西可以禁止超限数 a 和 c 之间不能有其他的超限数.然而一切已知的点集若不是像有理数域或代数数域一样为可数的，就是像超越数域一样具有算术连续统之势.所有想建立一种人工的点集使其势"大于"自然序列而"小于"直线上的点集的企图，至今都无福戴上成功的王冠.

另一方面，其势大于 c 的集合已经知道是存在的.其中有一种称作函数流形，它就是两个连续统之间所作出的一切对应的全体.这全体是不能用连续的直线上的点匹配完毕的，正如后者不能以自然数匹配完毕一样.它相应的基数用 f 表示.同样地，康托尔的理论又绝未限制在 c 和 f 中间不能有其他的超限数存在，然而其势大于 c 而小于 f 的集合也还一直未曾发现过.

而且,在 f 之外仍然有更大的基数.对角线法既然能让我们 [225] 由连续统推出函数"空间",我们就可以同样用它由函数空间推出不能和对应的集合相匹配的超函数空间.照这种办法,可以作出具有更高更高的势的集合,我们无法设想这种过程是会有尽头的.

14

这样就推到最后的边界了,康托尔的理论宣布了没有最后的超限数.这个断语很奇怪地和另一个断语很相像:没有最后的有限数.然而后者是一种公认了的假定,是有限算术的基本假定,至于在无限算术中,这个类比的陈述则似乎是整个理论的逻辑结论.

没有最后的超限数!这个命题听起来是极其自然的,可是其中包含着一大包炸药,几乎炸坏了整个理论,这正好发生在当康托尔征服了他的第一批反对者的顽强抵抗,有充分理由相信他的原理已经大获全胜的时候.差不多与此同时,发现了一连串的"现象",尽管它们似乎性质各不相同,可是都表明着什么地方出了乱子了.意大利的布拉里—福蒂(Burali - Forti),英国的罗素,德国的克尼希(König),法国的里夏尔(Richard),都各自发现了一些二律背反和悖论,它们各以其作者命名.这一回,就像应用实际无限于数学是否合法的问题一样,康托尔的方法和演绎是否有效的问题再次发生了.

若把所发现的这种矛盾的性质详细介绍,那就走得太远了.虽然这些悖论各不相类,但它们似乎都围绕着一个问题:一切这 [226] 个名词如果要在数学上使用的话,应该怎样使用才对?如果这个名词能够自由地使用于心中所能设想的任何动作的话,那么我们便可以说一切集合的集合.现在,如果这是一个康托尔意义的集合,则它必定也有一个基数.这个超限数就是"所能设想的最大数",因为,难道我们能够设想出一个集合,其势大于一切集

合的集合吗？所以，这个基数是最后的超限数，它是我们名之曰数的这个抽象物在其进化中的真正超终极的一步了！然而，刚刚不是说过：没有最后的超限数吗！

15

自从这些悖论提出以后，岁月已经流逝了许多；有许多解答提了出来，问题的两个方面都有人写过成千篇的论文，康托尔派及其反对者都各尽了其讥诮之能事．然而问题仍然没有结果．康托尔发现数学不可分割；他现在却使它分裂为两个敌对的营垒．

要用我所使用的简单的方法来介绍这敌对的数学上两"党"的"政纲"，而又如我所希望地那样避免一切专门的术语，那是不可能的．然而，如果对近代数学中这一最为紧要的事情闭口不提，则又使我的节目太不完全了．因此我将简单而扼要地叙述一下双方主要代表人物所发表的悖论．

在"形式主义者"一边有希尔伯特、罗素、蔡梅罗(Zermelo)．他们是替康托尔辩护的"孟什维克派"，这样叫的原因是因为他们想要保全他的少数派纲领．他们承认无限制的滥用"一切"、"集合"、"对应"、"数"等名词是不许可的．但是，解决的办法并非[227] 完全否定集合论，而是要依据纯粹理性来把该理论重新改造．我们必须设计一个公理体系供作该理论的基础，而且为了使我们确信我们再也不会被直觉引入歧途，我们必须建立该体系的纯形式的、逻辑一致的纲领，即一个没有内容的框架．建立了这样一个包罗万象的、不相矛盾的系统之后，我们就可以以之作为无限算术的基础，这样我们就敢于相信再不会有什么悖论或二律背反来扰乱我们内心的和平了．希尔伯特说："休想有人能把我们从康托尔为我们所创造的乐园中赶出．"

16

直觉主义者自从克隆尼克开其源，彭加勒助其势之后，我们

今日的代表者有如下几个大思想家,例如荷兰的布劳威尔(Brouwer)、德国的魏尔(Weyl)等,法国的博雷尔(Borel)在某种程度上也可以算在内,他们却另有一本经.他们说,康托尔主义不是把集合的定义仅仅调整一下就可以得救的.其病源远在康托尔之前,病根业已甚深,数学的整个体系都蒙受了它的影响.魏尔说:

> "我们非得学会一种新的谨慎态度不可.我们已经弄得风云满天,但所成功的只是叠云架雾,一种不能承受真心实意地打算站在它上面的人的烟雾.所谓有效也者,似乎那么地无意义,以至于可以严重地怀疑到分析学究竟是否可能."

对于直觉主义者,问题不只限于集合论的范围.他们认为一个概念要能在数学领域内成立,不是"适当地定义"就够了:它还必须是可构造的.一个概念不但必须在名义上有其存在,而且应该给出一个可决定此概念所代表的对象的实在的构造.至于谈到构造,唯一允许使用的就是有限算法,或者是——自然这是一种让步——那种无限算法,它可以用有限次的步骤化为有限算 [228] 法.既设想有无限个单个的物体,又同时把这无限的全体设想作一单个物体.这种思想上的动作不属于应予认许的概念的范畴之内,必须先验地屏弃于算术之外.这不仅意味着要把集合论打个粉碎,而且即使是无理数概念也必须大大改变一下,直到把分析学中漫无节制地应用无限所生出的污秽一扫而尽为止."因为,"魏尔说,"数学,即使就贯穿其中的逻辑形式而言,也是全部依赖于自然数的概念的."

17

正当分析学基础的有效性受到猛烈冲击的时候,这个结构自身却很快地站立起来了.每年都可以看到进步;这种进步,如果在19世纪就往往需要几十年时间.每年都看到了新的归纳知

识领域的开辟，这些知识都毫无抵触地接受了数学分析的渗透．至于物理——物理是分析学所征服的第一个地带——相对论的泛宇宙只不过是微分形式的宇宙，微观世界中的不连续现象看来也是服从波动力学定律的，而这些定律从各方面看来恰好是微分方程的一种理论上的应用．

我们又看见了那些大声宣称王国基础不稳的人物的怪事——我们看到这批忧郁的领导人却时时抛开了他们自己的报警[229] 之言，而参加了扩充王国的狂热活动，把战线远而又远地向前推进着．

这就是逻辑的王国．

18

从人们神奇地想象出一对野鸡和两天都是数字 2 的两个例子的那天起，一直到人们想用数字来表达他自己的抽象能力的这一天止——这是一条漫长而艰苦的道路，有着许许多多的迂回和曲折．

我们是不是已经走到了山穷水尽的地步了呢？我们是否不得不走回头路呢？再不然就是，现在的这一危机是不是又只是另一个急转弯，在这里，若以过去推断未来的话，数又将大获全胜，而使我们攀登上新的更加令人炫目的高度呢？

第12章 两种实在性

[230]

"在未知的岸上,我们发现了一种奇怪的足迹.我们想出种种深奥的学理来推究足迹的来源.我们终于又成功地再造了印下此种足迹的生物.啊呀!原来就是我们自己."

——爱丁顿(A.S.Eddington)

1

已经到了我的故事的结局了.我的目的本来是根据过去的历史来视察数的科学的现状;因此,在这视察的末尾一章中,向未来投以一瞥,似乎也是合宜的.然而未来分明是属于先知们的,我应该尊重他们的特权.

这里还剩着永恒的现在:也就是关于实在性的争论.这个争论自从人类首次自觉地想要估计他在宇宙中的地位时,就成为哲学家监管的对象;今天它还是哲学家的首要任务.

所以我完全知道,选实在性作这末章的主题,实在是侵入了一个与我的素养无关而又与我的见地无关的领域了.我更要承认,我对于这个古老的二难论证是不会有所贡献的;我也不想把从苏格拉底以来互相敌对的各派哲学家已说过的有关这个争论的内容重复一遍.

我的兴趣完全限于:数的科学在人类知识的总体里所占的位置.从这个观点出发,我将考虑数的观念和我们感官所得的实 [231]

在性之间的关系，希望由此而能明了数学在创造新实在性(即现代科学的超实在性)的历史上所扮演的角色.

2

对于实在性的论点，哲学家和数学家所取的态度存在着这样根本的差异：在哲学家看来，这论点是至高无上的；而数学家对实在性的爱情则纯粹是柏拉图式的精神恋爱.

数学家非常乐于承认，他是专门和心的行为打交道的.的确，他也知道组成他的行业的根基的独创技能，来源于感觉印象，他把后者等同于原始实在，当他有时发现这些技能和生此技能的实在十分吻合时，他并不感到奇怪.但是数学家拒绝承认用这种吻合作为其成就的判断准则：从他的创造性想象中跳出来的东西，其价值是不能用其在物理实在性中的实用程度来衡量的.不！数学的成就要用数学所独有的标准来衡量.这些标准和我们感官所得的原始实在无关.这些标准是：没有逻辑上的矛盾；制约此种创造形式之规律的普遍性；新形式与原先形式之间的血缘联系.

数学家好比一个服装设计师，他实在完全忘记了穿他缝制的衣服的人物.当然，他的手艺，原是为了给这些人物作衣服的，不过那是好久以前的事了；到了现在，偶尔遇见某人的身材正合[232]于此衣服，好像这衣服就是为这身材而制的，这样就有了无限的惊奇和喜悦！

这样可喜的意外确实不少.圆锥曲线的发明为的是要解决祈祷神坛的加倍的问题，结果却变成了诸行星绕太阳环行的轨道.卡尔丹和邦别利所发明的虚数数量，能够奇怪地描绘出交流电的特点.黎曼的幻想所产生出来的绝对微积分，变成了相对论的数学方法.而在凯雷(Cayley)和西尔维斯特(Sylvester)时代完全是抽象的矩阵，却可惊地适用于由量子论所揭示出的原子的奇异位置.

虽然这些意外是那样地令人喜悦，但去发现它们并非数学家创造性工作的原动力.在数学家看来，数学是他发挥其个性的最好场所.为数学而数学！“人们固然为这口号所震惊，”彭加勒说，“可是它跟为人生而人生可以媲美，如果人生不过是愁苦的话.”

3

宗教是各种科学的母亲.儿女长大后就离开了母亲；哲学住在家中以娱老母的晚景.而在长期的厮守中，这位女儿的故事比母亲还要长些.

到了现在，哲学的中心问题还带着神学意味.照我看来，哲学所最缺乏的就是一种相对性原理.

相对性原理只是一种限制的法规：它规定了一种学问的活动范围，而且坦白地承认，没有办法能确定某一组事实究竟是所观察物的表现呢，还是观察者的幻觉.〔233〕

相对性原理是一种谦让的行为，哲学的相对性原理则在于坦白承认下述的古老的二难论证之不可能解决：宇宙究竟是自有其存在呢，还是只存在于人心中呢？对于一个科学家讲来，接受这个或那个假设完全不是“存在或不存在”(To be or not to be)的问题；因为站在逻辑的立场，哪一个假设都是持之有故的；而站在经验的立场，哪一个假设也是不能证明的.所以，其选择始终不过是一种权宜手段和方便做法而已.科学家的行为总是把这个世界当作一个由定律支配的而与他自己的行为和思想完全无关的绝对整体；可是每当他发现了一个定律或是异样地简洁，或是彻底地普遍，或是暗示出大宇宙的无比和谐的时候，他就应当聪明地想一想，他的心灵在这个发现中起什么作用，究竟他在永恒的池塘中所见到的美丽影象是这永恒的本质的表现呢，还是只是他自己心灵的一种反映？

4

如果我们试图确定一般的数概念的实在性程度,哲学家关于实在性的思辨对我们是没有多大用处的.必须找出别的方法,这一点是肯定的.不过,我先要处理一下术语中的某些含糊性.

数学家所用的一些术语,总而言之还是字,是属于远古以来人类企图用以表现其思想(数学的和非数学的)的有限的词汇中的字.在这些术语中,有些,例如几何(Geometry)和微积分(Calculus),已经失去了其原来的双重意义,人人都知道它们在数学[234]实践中所获得的特殊意义.但是其他一些术语,例如逻辑的和非逻辑的,有理和无理,有限和无限,实和虚,就在现在还保留着多重意义.数学家极少去作形而上学的冒险,对于他,这些术语都有非常特定而且毫不含糊的含义;对于哲学家来讲,这些术语也是他行当中所习用的,也有非常特定然而完全不同的含义;对于既非数学家又非哲学家的人来讲,这些字却有一种广泛而且颇为模糊的意义.

在哲学家企图将他关于数学基本概念的分析呈示于外行大众以前,还没有出现什么困难.而当他这样作时,类似无限或实在性这些词便在外行人的头脑中产生了无可挽救的混乱.

特别是实和虚的概念.这两个不幸的而却是历史上不可避免的术语是由一位哲学家——笛卡儿作出的.虚数这个名词,当着 $a+\sqrt{-b}$ 这种数量还没有找到具体的基础时,这样叫是有其理由的.但当这些数量一旦找到了解释,虚数这个名词之不适当就立即被认识到了.高斯这样说道:

"这个论题被从这样一种谬误的观点来探讨,而且被这种神秘的暧昧所包围,主要是因为所用术语的不当.如果 $+1,-1,\sqrt{-1}$ 不叫作正一,负一,虚数单位(有时甚至于叫作不可能),而叫作,比如说,正向单位,反向单位,侧向单位,

这种暧昧就可以避免了."

然而这种抗议往往是徒然的:虚数这个名词已经是根深蒂固的了.数学术语的稳定性是惊人的,这也许是由于数学家的保 [235] 守主义,或者是由于他选用名词时不很在意,只要不含有模糊不清就行.虽则如此,复数这个名词终于已经半冷半热地用来代替了虚数,不过直到如今,两个术语还都在通用着,至于把实数这个名词改为更恰当的术语,就一直不曾有人提过.

虚数这个术语,在此种意义上的应用,使若干实在论专家得以拿来作证据,说近代数学是如何浸于神秘性之中.他们争辩说,数学家在选用这些术语时,就自认这种数量的虚幻性了.这样的辩论,跟一位矿物学家说微积分有石头的性质其道理差不多,因为 calculus(微积分)这字的原义是石卵.

5

如果复数果然有任何不实在性的话,那既不是由于它的定名,也不是因为它使用了符号 $\sqrt{-1}$:复数只不过是把一对实数当作单个数来看待,不能因此而说它比组成它的实数更为虚幻,或者更不虚幻.所以,要评论数的概念的实在性,就应当返回到实数上去.在这里,哲学家或许可以找到他所要寻找的数学的神秘性的大量证据.

不论我们的自然数概念抽象到什么地步,其概念发源于有限集合体这一可靠的"实在性".当我们开始把这些数当作总体来看待时,我们必然带进了一切这个名词及其全部含义.但无限概念被用于有理算术中,只限于断定每个数都有其后继数.其所以提出此种计数过程的无限性质,是为了使整数的运算法则具 [236] 有绝对的普遍性:在这里无限之被使用只是潜在的,并不具有现实性.

有理数不过是一对整数,所以其实在性不亚于整数.如果我们如克隆尼克所教的那样,避免了无限算法,从而避免了无理

数,那么复数也不过是一对有理数,而当我们说有理数具有任何一种实在性或非实在性时,则复数也具有这种实在性或非实在性.但是为了寻找出一个域,使得每个代数方程在此域中都有一个根存在,我们就不得不承认无限算法为合法,而我们称作实数的东西就是从这里产生出来的.我们不能继续限于把无限当作一种比拟之言,或者当作不论多大的数都有一个数比它更大的数的陈述的缩写;演变之道就是把无限请来当作数的产生原则;于是,每个数都被看作一个无限算法的最后一步;无限概念就被织进我们的广义的数概念中了.

自然数域是建筑在加一的运算可以重复无限次的假定之上的,但它明白规定,此种过程的最后一步自身是不能当作一个数的.推广到实数时,不但把无限重复的有效性扩张到了任意的有理运算,它实际上是抛弃了这种限制而认为这种过程的极限也是忠实的数.

这也正是名词的反语,所谓实数,是牺牲了我们归之于自然数的一部分实在性而得到的.

[237]

6

这些无限算法将绝对普遍性赋予我们的算术,使之成为我们的几何直觉与力学直觉之工具,更由几何和力学使得我们能用数表示出物理和化学的现象,那么,这些无限算法的实在性又如何呢?真的,如果实在性只限于我们感官的直接经验,则数学家也好,哲学家也好,外行人也好,没有一个会思考的人能够说这种概念是有实在性的.

可是,普遍的意见却都以为,无限的有效性乃是经验科学进程里的必然产物.如用我自己的话来反驳这种论点,那就显得我太想掠美了,因为希尔伯特在纪念魏尔斯特拉斯的有名演讲里,已经有了那么雄辩的答案:

"无限啊!从来没有别的问题这么深刻地打动人类的

精神；也没有别的观念这么有效地刺激起人类的智慧；然而也没有别的概念能像无限概念这么需要澄清……

“当我们开始讨论无限的精髓是什么时，我们必须首先使自己明白无限在实在性上的意义：那么让我们看看物理学在这一点上是如何告诉我们的.

“自然与物质所给与的第一个朴素印象就是连续性.不论是一块金属或者一定体积的液体，我们不能不相信它可分为无限部分，而每一部分不论其如何小，也具有和整体相同的性质.然而，不论研究物质的物理方法进步到什么程度，我们必然要碰到可分性的限制，这种限制并不是由于实验欠缺精确所致，而是归属于现象的根本性质.我们简直可以认为，对于无限的逃避乃是现代科学的一种趋势，古谚自然界没有飞跃也将用它的反面来代替：自然界确有飞跃…… [238]

“我们大家都知道物质是由小质点即原子组成的，而宏观现象不过是这些原子之间的组合和互相作用的表现罢了.然而物理并不以此为止境：在上世纪末，又发现了其行为更加特别的原子电荷.尽管在此以前人们都认为电是一种流体，是一种连续的作用，这时却明白了电也是由正和负的电子组成的.

“除了物质和电之外，物理中还有另一种实在，对于它，守恒定律也是成立的；这就是能.然而，即使是能，人们也发现了它是不能简单而无限地加以剖分的.普朗克(Planck)已经发现了能量子.

“结论是，实在中没有一处存在着可能无限剖分的均匀连续统，存在着可能实现无限小的均匀连续统.一个连续统的无限剖分是一种只存在于思想上的动作，只是一种观念，一种被我们对自然的观察所驳斥的观念，也是被物理及化学实验所驳斥的观念.

“我们在自然界中第二次遇见无限问题的地方就是当我们把宇宙看作一个整体的时候.让我们试考察这个宇宙的外延,看一看是否存在一种无限大.长久以来,认为宇宙是无限的意见一直是占统治地位的观念.到康德为止,甚至在他以后,都很少人对宇宙的无限性有什么怀疑.

“在这里,现代的科学,特别是天文学,又重新提出了这个问题,而且试图作出判定,不是根据那不适宜的形而上学思辨,而是以实验和自然定律的应用为基础.这又出现了对宇宙无限性的有力的反对.无限空间只有在欧几里得几何中才是必然的……爱因斯坦(Einstein)证明了欧几里得几何学必须放弃.他由他的万有引力理论的立场也来研究这个宇宙论的问题,并且证明了有限世界的可能性;而天文学家们所发现的全部结果都是和这个椭圆宇宙的假设相一致的.”

[239]

7

这样,我们对于物理世界的知识愈进步,换句话说,我们用的科学仪器把我们的感觉世界愈推广,我们就愈发现无限的概念和这个物理世界,不论在原则上,在实际上,都不能相容.

既然无限的概念不是逻辑的必然,又远远不为经验所认可,而一切经验都只是断言其为谬误,那么看来无限在数学应用上就必须在实在性的名义下宣判为不适用.这种宣判将把数学缩小到第四章所论的有界算术和有界几何中.“所谓有效也者似乎那么无意义,以至于可以严重怀疑到分析学究竟是否可能.”近三个世纪的数学家所建立的摩天大厦必须铲平至地基为止;由无限的应用而得力的原理和方法都必须去掉;物理学曾经如此自信地应用极限、函数和数等概念,以构成和分析其问题,如今须得重新开始了:必须重新建立其基础,找出新的工具来代替那

被宣判了的工具.

这一切都是以实在性的名义所得的结果!

8

当然,这是一个苛刻的纲领.不过进行了这样的修正以后,数学中经过了这种清滤过程,所剩下的一点点东西就将和实在完全一致了.

一定会吗?这就是问题了,而且这问题等于另一个问题:"实在性是什么?"在问后一问题时,我们不需要吹毛求疵的定义,也不需要文不对题的遁辞;我们所唯一关心的是我们应该赋予实在性的范围,这是我们今后用以验证何者有效和何者无效的准则. [240]

我们自然要转向实在性的各色专家去请教.他们每一个都奉献出他那特有牌号的实在性,但是说到这个唯一的实在,好像没有这么一件东西.我们所处的境遇就如法国人所生动地描述过的,embarras du choix(无所适从).

在这些牌号的实在性中,有两种实在性特别引起我们的兴趣:主观实在和客观实在.主观实在好像可以说是一个人所有感官印象的集合.至于客观实在的定义,依各派哲学家而不同,因为正是在此处,在我们意识之外的世界存在或不存在的二难论证达到其最高点.除去一切形而上学的废话,除去哲学的行话,那就是彭加勒的讲法:"我们称作客观实在的东西,归根结底,就是许多能思维的生物所共有的东西,就是一切能思维的生物所能够共有的东西."尽管这个说法含糊不清,尽管"一切能思维的生物能够共有的东西"这种说法如此软弱,但这总还是与我们每人看来都持有的直觉观念中的实在性,最相近的一种说法了.

9

决定实在性的有效范围之困难,显然在于,没有人能将他自

己的感官印象集合而成的主观实在和那种他由于跟现在的或过[241]去的别人接触而得的客观实在切实分开.对原始民族的心理学的研究也许有助于弄清这个问题,不过这里也免不了有环境的作用.使我们能够最接近地去掌握这种主观实在的莫过于儿童心理;然而,因为我们不能重建我们儿时的印象,那就只好依赖成人对儿童所作的研究,这种研究是不免染上先入之见的色彩的.

我们且假定各人的主观实在相当于赫尔姆霍茨(Helmholtz)和马赫(Mach)等生理学家和心理学家这一派的由声、光、触等知觉所得的材料.如果取这种实在性的范围作为判别有效性的标准,其不可避免的结论就会是,即使在数学中滤去了无限,所余下的已经很贫乏的算术还要进一步斩臂断腿;因为计数法不是这种实在性的一个部分.

计数法预先假定了另外一种实在,客观实在,这个术语在这里指彭加勒所使用的那种意义.计数预先假定了人类能够将不同的知觉依同一标题而分组,能够给该组一个名;又预先假定了人们有能力将两个集合中的元素一一匹配起来,并且将这些集合与数字相连,后者不过是某一给定的多寡性的模范集合;它还预先假定了人们有能力将这些模范集合排成序列,并找出一种措辞使这些数字能够无限制地伸展下去.总而言之,计数法预先假定存在着一种语言,这是一种超越了主观实在或各人直接知觉的机制.

那么,如果我们取这种主观实在作为判别数学有效性的准则,我们不仅将被迫放弃无限算法及其一切它所暗含的东西,而且要把计数法取消.原始感觉,例如鸟和昆虫所具有的那种原始感觉,才是唯一合法的数的领域;而且,人类文明的整个复杂结[242]构也将连同我们的语言和算术一起取消,因为我们的文化是建筑在人类的这两种机制之上的.

10

存在于我们意识之外的绝对的和不变的世界，我们只有从神学的思辨中才能得知：承认它或者否认它，对自然哲学来说是一样地不会带来什么大益处的．然而，把我们感觉上的原始实在承认为主要实在，唯一的实在，那也是同样地无关痛痒．把一个新生下来的婴孩，或者原始人，或者禽兽，当作这样一种主要实在的体现者，确是便于作出系统的解释的．我们也可以更进而像赫尔姆霍茨、马赫、彭加勒辈那样，想象有一个智慧的人，他去掉了一切的感觉，而只留下其中一种，例如视觉，让我们猜想一下这样一个人所创造出的世界类型．这个猜想是极其迷人的，它能够充分发挥我们把种种感觉分解为它们的各种要素的能力，然后，把概念当作这些主要感觉的复合．不过，要承认这种复合体为实在，作为唯一的实在，我总以为有一个致命的缺点：它假定了一个个体智慧的存在；然而，正是在协调这些感觉的过程中，包含了思想，思想没有语言作载体是不可能的，语言又暗示着种种印象的有组织的交换，此种交换又预先假定了人类的一种作为集体的存在，假定了某种形式的社会组织．

我们可以取来作判断有效性的准则的唯一实在，绝不是我们意识以外的绝对而不变的实在，因而是纯形而上学的实在，它也不是生理学家、心理学家试图通过繁难的实验方法而分离出来的主要实在；它无宁是那种为许多人所共有而且也能够为一[243]切人所能有的客观实在．而且这种实在并不是一些凝固的影象的集合，乃是一种活的、生长着的有机体．

11

但是当我们回到这个客观的世界时，如果我们想于此找出一个判断数学概念的实在性之准则，我们又碰上一种新的困难．所谓许多人所共有的东西，可以限于个别人与其他思维生物所

共有的直接印象;然而也可以包括人类由科学工具的应用所得到的一切资料,因为这些事实也是许多人所共有的,也还能够为一切人所共有.后面这种扩大了的世界,可以有效地用来判断任何定性陈述的实在性,但是,一当我们用之作为数的准则时,我们又碰到这一事实,即这个客观世界又预先假定了数,因为我们的科学工具都是循着既定的数学原理而设计而制造而应用的,可是这些原理又都是以数为基础的.

事实上,不论我们用一把尺,或一架天平,或一具压力计,或一个温度计,或一副圆规,或一个电压计,我们总是在测量一种我们看来是一个连续统的东西,而量度时则用一种渐变的数度.于是,我们假定了这个连续统中的可能状态和我们所处理的数的集合之间存在着完全的对应;我们实际上默许了一条公理,该公理在这个连续统中所起的作用,和狄德金—康托尔公理在直线中所起的作用一样.因此,不论是一种看来多么简单而又自然的测量法,都包含着实数算术的全套装备:在任何一种科学工具的背后都有一个至上的工具即算术,没有它,这种特殊的装备都是不能使用甚至不能想象的.

[244] 因而,这就是困难之点:如果我们用包括由科学工具所得出的一切资料在内的客观世界来判断实数的实在性,我们就是在搞循环论证了,因为这些工具已经假设了实数的实在性.

如果我们将客观世界的范围缩小到只包含我们和其他人所共有的直接印象的范围,我们还是不能避免循环论证.假设我们废除一切量度的方法,设我们只用公意作为判断实在性的唯一准则.我们又如何才能得到一个有效的判断呢?当你因为你视为红的却被我视为绿的就宣称我是一个色盲时,如果不采取服从多数的方法,你又怎能证明你的判定是真的呢?这样一来,我们又得一致同意请数来作决定了.

数字是不说谎的,因为它不会说谎.它之不会说谎,因为它先验地被宣判为不会错的.既已推定数作判断的唯一主宰,既已

同意服从它的裁定,我们就在事实上放弃了诉诸其他法庭的权利了.

12

结论是什么呢?

一个人若没有环境,剥夺了语言,剥夺了和其同类交换印象的一切机会,是建造不出一种数的科学来的.对于他的感知世界来说,算术将没有实在性,没有意义.

另一方面,一个思维着的人,其客观世界是由他和他的多数同类共有的印象所构成的.对他来说,我们可以给数以一种什么样的实在性这样的问题是无意义的,因为不存在没有数的实在,正如不存在没有空间或没有时间的实在一样.

这样,不论在主观世界里或客观世界里,都找不出一个关于数概念的实在性的判断准则,因为前者不含有这种概念,后者却逃不出这种概念. [245]

然则怎样才可以得出一种判断准则来呢? 不能靠证据,因为证据是灌了铅的骰子.不能靠逻辑,因为逻辑不能离数学而存在:它只是我们称之为数学的那种多面的必然性的一个方面.然则数学的概念如何来审查呢? *它是不受审查的!* 数学是最高的审判官;它判决之后,再不能上诉了.

我们不能改变这种游戏的规则,我们不能确定这种游戏是否公平.我们只能研究游戏中的游戏者;可是却不能采取旁观者的超然态度,因为我们所观察的正是我们自己心灵的游戏.

13

我回忆起我自己刚刚进入到复数的神秘之境时的感情.我记起了我的迷惘:这里是一些数量,明明是不可能的,却接受运算规则而得出具体的结果.这给我一种不满足、不安静的感觉,

希望能用实物来填满这种虚幻的创造物，填满这些空洞的符号．后来我学到了这种实体可以用具体的几何方法来解释，我立刻感到了一种舒畅，仿佛我打开了一个闷葫芦，仿佛一个令我恐惧的鬼魂，后来弄清楚了并不是什么鬼，而只是我所熟悉的环境的一部分．

从那时起，我有许多机会得知，我这感情是其他许多人所共有的．为什么有这种舒畅之感呢？因为我们已经给这种符号找出了一种具体的模型；我们发现我们能够给它们附以某种熟悉的东西，某种真实的东西，至少也是似乎真实的东西．但是为什么我们把平面上的一点——或者无宁这样说，测量这样的一[246]点到两个任意参考轴的线段——看做比量 $a + ib$ 更为实在呢？在平面、直线、点的背后究竟是什么实在性呢？仅仅在一两年以前，这些东西对于我也不过是些幽灵而已．平面是四面八方无限伸张的——对此，我所有的最好的近似物，乃是一张八英寸宽十一英寸长的纸，或者是满布擦痕和隆起的不平的黑板．线是没有宽和厚的；两根这样的线相交之点——一个无度可言的东西，一个纯粹的幻象，从来没有什么东西可以作它的模型；最后，还有这样的点的坐标，它包含着一切的不确定性，一切的量度的不准确性——难道这些东西就是能使我感到放心的具体实在性吗？

我们把一种幻影依附于一种幻想，后者比前者的长处就在于它是一种*熟悉的幻想*．然而它并不是素来如此熟悉的；在某个时代，它也教人迷惘不安，直到后来我们给它一种更为原始的幻象为止，这最后的一种又是曾经经过若干世纪的习惯才变成具体的．

14

今日的实在不过是昨日的幻象．幻象之能存留着，在于它可以帮助我们组织、整理和支配我们的经验，因而对于人类的生存

大有裨益.这就是我对于下一段尼采的话的解释:

> "我们认为,仅仅因为某一判断是错误的还不足以为拒绝该判断的理由.问题在于:在什么程度上这概念能够保持和促进人类的生存?最错误的概念——我们的先验的综合判断属于这类——也就是最不可缺少的概念.如果没有他的逻辑的想象,如果不在一个想象的、绝对而不变的世界中量测实在性,如果没有数所制造的关于宇宙的永恒的仿造 [247] 品,则人类将不能继续生存.废弃一切错误的判断,也就是废弃人生,否定人生."

不是直接的证据,也不是逻辑的定律,可以决定数学概念的有效性.问题在于:在什么程度上这概念能够保持和促进人类的智力生活?这就是为什么那些愁眉苦脸的大学究所给我的警报并不引起我惊恐的原故.任何一种幻象的有效性,其判断标准都是事后才能论定的,有时甚至盖棺才能论定.能够保持和促进人类的生存的就可以繁荣生长,从而赢得实在性的权利;有害的或无用的,最后只好请到形而上学和神学的课本中去,它们也就定居在那里.这样它们也算死有所得①.

15

实验的证据和逻辑的必然性都不足以穷尽我们称之为实在的那个客观世界.有一种数学的必然性,它指导着观察和实验,逻辑不过是这种必然性的一个方面.其另一方面,就是那个难以捉摸、完全非定义所能确定的东西,即所谓直觉.这样,让我们回头来看看数的科学的基本问题:无限.无限的概念既不是实验的天然物,也不是逻辑的必然物;而是*数学的必然物*.头脑知道它能想象出*一种可能的动作的无限次重复*,我们对头脑的能力的这种肯定*也许是一种纯粹的幻想,然而它却是一种方便的*,从而

① 参看附录26:数学和实在性.



就是必要的幻想了.它使我们不用再检查每个特殊的情形,以决定我们对此情形所断言者究竟是否可能.它使我们的命题具有一种普遍性的外观,没有它们即不足以言科学;而最主要的是,[248]它沟通了一个在时间之流中流动着的世界的不可逃避的概念和计数离散的东西所产生的数的概念.

然而无限也只不过是人类在"绝对性的追求"的路程中的许多歧路之一罢了.还有其他许多岐路:简单性、均匀性、齐次性、规则性、因果性,这些都是这种数学直觉的其他表现.只有数学直觉才促使人类的心灵去追求绝对性的空中楼阁,因而丰富了人类的智慧遗产;不过对于空中楼阁的过度追求,又会使这遗产陷入危险中,这时又是数学直觉来阻止心灵的飞翔,因为它会狡狯地低声说道:"被追求的和追求者是多么奇怪地相像啊!"

16

这种创造性直觉的来源又是什么呢?这种组织和指导人类经验并将之从"浑沌"的恐怖中拯救出来的必然性又是什么呢?哪里来的这种力量用以举起冰冷、静止而贫瘠的逻辑之岩石呢?

"波涛诉说着它们永恒的私语,
好风吹过,云在航行,
群星冷漠而冰凉地眹眼,
愚人却在鹄候着他的回音."①

聪明人又如何呢?聪明人重新拾起他的活计,纺织着今天的幻想,它可能成为明天的现实,同时,他向遥远的山峰投以最后的一瞥,在这些山峰之后,思想的源头消失了.他反复念诵着那位大师的话语:

"源头茫昧虽难觅,
活水奔流喜不休."

① 海涅的诗句.——译者

数概念进化途中的里程碑

古　代

成　　就	功　臣	国　籍	时　代
无理数的发现	毕达哥拉斯	希腊	纪元前6世纪
无限概念的第一关	芝诺、柏拉图、亚里士多德	希腊	纪元前4世纪
极限概念的第一次系统整理表述	阿基米德	希腊	纪元前3世纪
零记号的发明	无名氏	印度	纪元后初期
负数	无名氏	印度	纪元后初期

文艺复兴

连分数的第一次系统运用	邦别利	意大利	16世纪
复数的第一次系统整理表述	卡尔丹、邦别利	意大利	16世纪
文字记号的发明	维叶塔	法　国	16世纪后期
因式定理的发现	哈里沃特	英　国	1631
无限小的系统整理表述	卡瓦列利	意大利	1635
无限集合的第一次系统整理表述	伽利略	意大利	1638

近　代

坐标几何的发明	笛卡儿	法　国	1639
数学归纳法原理的第一次系统整理表述	巴斯伽	法　国	1654
微积分的发明	牛顿、莱布尼茨	英国、德国	约在1677
无穷级数的第一次系统运用	牛顿、莱布尼茨	英国、德国	约在1677
复数的几何解释的发现	高　斯	德　国	1797

19 世 纪

成　　就	功　臣	国　籍	时　代
集合之势的第一次系统整理表述	布尔查诺	德　国	1820
非方根所能表出的代数数的发现	阿贝尔	挪　威	1825
四元数的发明	汉密尔顿	英　国	1843
超越数的发现	柳维勒	法　国	1844
可展量的第一次理论	格拉斯曼	德　国	1844
形式律中固本原则的首次明晰系统整理表述	汉克尔	德　国	1867
无理数的第一次科学理论	狄德金	德　国	1872
无理数的第二次科学理论	康托尔	德　国	1883
超限数的发明	康托尔	德　国	1883
集合论中悖论的发现	布拉里－福蒂	意大利	1897

附　录

1. 论动物和人的数觉

[253]

如果我们不实际地借助于计数，如何判别一个集合中的客体的数目有了改变呢？这个问题看来曾经使得本书前几版的一些读者感到迷惑．人之所以得到这种判断，我以为，对其过程之性质的思辨不是本书讨论的范围．但是，著者不愿对读者的创造性想象也加以同样的限制．有些读者曾提出了对于这种奇怪的现象的解释，著者认为有几种较为可信的猜想，值得列举如下：

集合中的客体的异质性，大大有助于作出这种判断．若你进入一间屋子，一眼就能看出屋中的人比平常要少些，这也许是因为你没有见到某个熟识的面孔；换句话说，你的估计之所以成功，也许因为组中各物的情形并非如"荚中的豆"，粒粒相似，而是各有各的特点．故事中的乌鸦所以能够察觉进了望楼的人没有完全走出望楼，或者就是用了这类方法．

克服一种阻碍（如举重）所需的生理上的负担，或持续耗力所伴随的疲劳，也很有助于正确的估计．好比你上楼梯，虽然并未计数已经上了几层，你的两腿却会告诉你是到了四楼还是五楼．独居蜂的关于数目的杰出才能也许可以用这种理由来解释．

对图型的辨别力也能提高人的数觉．一瞥桌上所摆的食具你就可能知道它比平常的四份要多，这是摆列的图型传达了信息．又如桌上摆了五 [254] 粒豆：若均匀排成一直线，彼此相当接近，乍看就不容易看出究竟是四粒、五粒、还是六粒；若排列疏密不匀，则较易于"猜中"；若排成梅花状，则你大概准能猜中了．鸟所以有察出巢中的卵被窃的本能，大概是这个道理．

著者觉得这些猜想不无可取，故特贡献给读者．

[255]

2. 论匹配和分组

读者或许听说过这个在几年前曾经风行一时的难题.我们对于这个问题之所以发生兴趣,是因为它与这类问题中的其他许多问题不同,对它能够作出严格的数学证明."若世界上的人数比任何一个人的头发的根数为多,则全世界至少有两个人的头发的根数相等."要证明这句话,我们设想把所有的人依头发的根数分组:第一组的人只有一根头发,第二组的有两根,依此类推.设以 h 表示一个人所能有的最多的头发的根数,则这样的分法总共只有 h 组,当然,其中可能有些组是"空"的.我们以 $F(n)$表有 n 根头发的人数,P 表世界上的总人数:则

$$F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(h)=P.$$

我们已经假定了 P 大于h;现在所要证明的是各 F 中至少有一个等于或大于 2.假定不是这样,则所有各 F 不是 1 便是 0;但是这样则所有各 F 的和最多不过等于 h,绝不能等于原假定大于 h 的P 了.

如果我们知道 P 和h 的相对数量,我们就可得出进一步的结果.例如,设世界上的人数为十万万,每人最多能有一万根头发.由上述的证法可证得,至少有十万人头发的根数是相等的.

[256] 这个方法所以能成功,在于我们能把一个集合分成有限个彼此不重叠的类.若直接的分类产生了重叠,即同一个体可属于不同的两类,上法就不适用了.

[257]

3. 论命数法的基底

命数法的进位原则,在本书第 2 章中作了历史的讨论.用代数的眼光来看,进位原则所根据的简单观念就是把每一整数展为基底(在我们的命数法中是以 10 为基底)的多项式.例如

以十为基底的　465 是 $4\cdot10^2+6\cdot10+5$;

以七为基底的　1233 是 $1\cdot7^3+2\cdot7^2+3\cdot7+3$;

以二为基底的　111010001 是

$$1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2+1.$$

各位的数字是多项式的系数,其与一般多项式不同的唯一特点在于这些系数只限于比底小的正整数.因此,算术的运算只不过是代数多项式的一般运算的改用,故它对于各种基底均能适用.

将各种数制所记的数化为十进命数法的数，其办法极为简单，反之亦然.这可用下二例为证：第一例，将七进制中的5555化为十进制.这里，$(5555)_7 = 5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5 = 7\{7(5 \cdot 7 + 5) + 5\} + 5$.实际计算如下表所示

7	5	5	5	5
10		40	285	2 000

故得 $$(5\,555)_7 = (2\,000)_{10}.$$

反之，将以十为基底的数化为其他各种基底的数时，我们可以用连除法，各步所得的余数便是在新基底上的数字.设要将1234化为五进制，我们如下表施行： [258]

1	9	49	246	1 234	10
1	4	4	1	4	5

即 $$(1\,234)_{10} = (14\,414)_5.$$

小数也可以用基底的负幂表出.例如

$$(0.465)_7 = 4 \cdot 7^{-1} + 6 \cdot 7^{-2} + 5 \cdot 7^{-3}.$$

这里顺便说一句，若基底是一个质数，例如7，由小数直接化得的分数即不能再约简了.

4. 阿基米德记录大数的方法 [259]

"所以，在像阿利斯塔克所估计的宇宙内，即以恒星为界的大球体内，所容的沙数显然比一千个第八类单位的万(Myriad)倍为小."

这是本书第4章所引阿基米德的著名的"算沙者"中的结束语.阿基米德的Myriad和第八类单位是什么意思呢？希腊人也有表示万的字，这字他们就称之为Myriad；阿基米德在处理大数时，从万万出发，即100 000 000，亦即10^8，他名之为奥克特德(Octade)，或叫作第二类单位.若以字母$\sum$代表一个奥克特德，则$\sum^2$为第三类单位，而一般说来$\sum^n$便是第$n+1$类单位.这样看来，所谓第八类单位等于$\sum^7$，也就是10^{56}.另一方面，一千万是10^7，所以阿基米德所说的数，只不过是10^{63}.用现代的说法，阿基米德的结论是说：这样大的沙球所含的沙的数目，其量是10^{63}粒.

[260]

5. 克谢尔克谢斯点兵法

"多里司科斯(Doriscus)地区位于色雷斯(Thrace),这是一个滨海的广大平原,有一条大河黑布罗斯(Hebrus)流经该地;这里筑起了称为多里司科斯的皇家堡垒,大流士王在他进兵斯奇提亚(Scythia)以来,就屯驻一队波斯警卫于此.因此,克谢尔克谢斯认为该处适于作为检阅和点计其大军的所在地,于是他就这样作了.所有舰队现已来到多里司科斯,各舰由舰长奉克谢尔克谢斯的命令停靠于邻近多里司科斯的海岸……并把船拖到岸上进行检修.同时,克谢尔克谢斯便在多里司科斯点计他的军队.

"各部分军队的数目我不能精确说出,因为从来没有人告诉过我们;但全部陆军人数算来共有一百七十万.其点计方法如下:集合了一万名于某地,令其尽量紧缩,然后画一根线围绕着他们;画好之后,这万人开往别处,沿这线砌一石墙高达人的腹部;此后,即将其他军队开入围墙内,如此计算,直到全军点完为止."

希罗多德:《历史》(Historia),第七卷,第五十九、六十章

[261]

6. 小数的历史

由下页附表,描绘了小数分隔号的奇特的进化过程,这个过程也是许多有用的数学发明或发现所共有的特点.第一,约莫在十多代精巧熟练的计算家使用了位置命数法之后,才认识到这个方法的种种优点中最大的优点就是便于处理小数.第二,即使这时,对其优点的认识也是远远不够的,不然的话,为什么在小数数字上还加上那些笨拙的附加字码呢?其实要使这办法充分发挥其效力,只要有一个符号将整数部分和小数部分分离开,就像现代所用的小数点就够了;但是不知道为了什么缘故,这些革新者,除了开普勒和纳皮尔之外,要么没有认识到这件事,要么不相信它能博得公众的采用.第三,在斯台文发现后的一百年,许许多多的记号仍在流行,这就使得当时的一位历史学家为此而感慨道:Quod homines tot sententiae,即:意见之不同,有如人面.实际上,差不多经过了一百五十年,小数的记号才确实稳定下来,其他多余的记号才被废弃.

[262]

用者	时代	记号
西蒙·斯台文(Simon Stevin)以前		$24\frac{375}{1000}$
西蒙·斯台文	1585	$24\ 3^{(1)}\ 7^{(2)}\ 5^{(3)}$
弗朗西斯科·维叶塔	1600	$24\vert_{375}$
约翰·开普勒	1616	24(375
约翰·纳皮尔	1617	$24\cdot\overset{\text{I}}{3}\overset{\text{II}}{7}\overset{\text{III}}{5}$
约翰·约翰逊(John Johnson)	1623	$24\vert\overset{1}{3}\overset{2}{7}\overset{3}{5}$
亨利·布里格斯(Henry Briggs)	1624	24^{375}
威廉·奥特雷德(William Oughtred)	1631	$24\vert\underline{375}$
雅格尔(Jager)	1651	$24\vert\dot{3}\dot{7}\dot{5}$
巴兰(Balam)	1653	24:375
奥扎纳姆(Ozanam)	1691	$24\cdot\overset{(1)}{3}\overset{(2)}{7}\overset{(3)}{5}$
耶克(Jeake)	1696	24·3·7·5
近代		24.375

此表根据卡乔利(Cajory)的《数学符号史》(History of Mathematical Notation).

7. 几何中的神秘

[263]

〔录自著者行将出版的《几何的故事》(The Story of Geometry)中的一章〕

虽然数话一直没有脱离朴素的神数术的范围,然而几何中的神秘主义却在现代达到了合理化的时期.我在这里特别指的是所谓黄金分割.这里用的"分割"一词有分配之意.原来的问题是将一段线段分成内外比(即依极端而又中庸的理性去分割),也就是分为两段,使小段和大段之比等于大段和整段线段之比.这是一种什么比例呢?设大段为1,小段为 r,则整个线段便是 $1+r$,我们必有 $r:1=1:(1+r)$.我们因此得出一个二次方程 $r^2+r-1=0$,这方程有一个正根,一个负根.正根 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 就是内外比(所

谓极端而又中庸的理性),或叫黄金比,或曰神赐比例,这个无理数在不同的地方和不同的时代有其不同的叫法.它的一个好的有理近似值是$\frac{5}{8}$,其与真值的误差小于百分之三.再者,定义关系又可写为形式:

$$r=\frac{1}{1+r}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+r}}=\cdots,$$

因而导出一个很值得注意的*无限连分数*(参看第8章第13节)

$$r=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}.$$

[264]

现在我们应当记得:按照所有神秘的解释,数1象征"宇宙"或"神明";而且,由于要用无限步才能求出这个比值,这更增加了这种解释的神秘性,因为无限也是上帝的特征之一.这也许就是这个比值之所以赢得神赐比例之名的理由①.其实,古人一点也不知道连分数.他们赋予这比例以神秘的意义,自有他们自己的理由:一半是美学的,一半是形而上学的.所以柏拉图借毕达哥拉斯主义者提马尤斯(Timaeus)的口说出以下的话:

"两个东西不可能有完美的结合,除非另有第三者存在其间,因为它们之间必须有一种结合物,最好的结合物是比例.设有三个数量,若中数与小数之比等于大数与中数之比,反过来,小数与中数之比等于中数与大数之比——则后项就是前项和中数,中数就是前项和后项.所以三者必然相同,既为相同,就是一体."

柏拉图派给黄金分割以神的性质,还有另一个原故.先请读者回忆一件事:在平面上正多边形的数目是无限的,但在空间便不同了;*正凸多面体只有五种*.这是柏拉图所发现的,因此这些正多面体被称为*柏拉图主体*.其性质如下表所示:

---

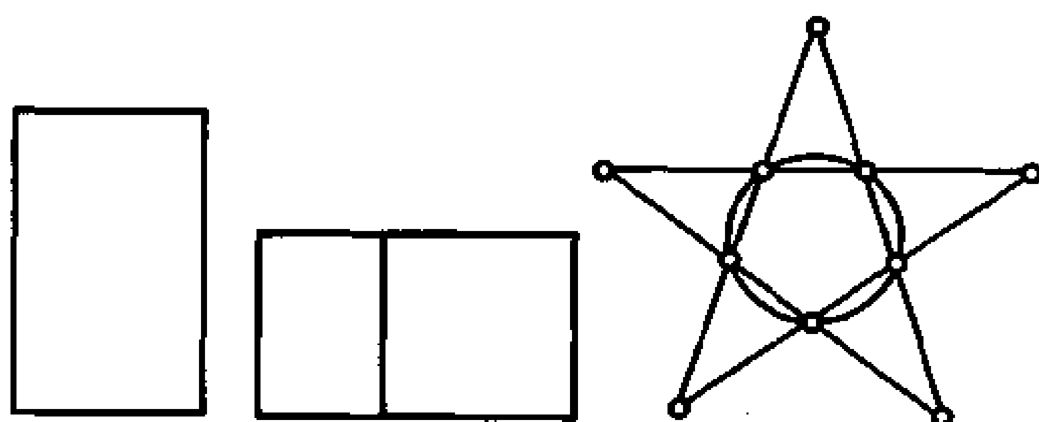
① 请读者注意第1章第10节中所述莱布尼茨对于数1的神秘解释.

柏拉图立体

	面	顶　点	棱
四面体	四个三角形	4	6
立方体	六个正方形	8	12
八面体	八个三角形	6	12
十二面体	十二个五边形	20	30
二十面体	二十个三角形	12	30

现在,柏拉图的宇宙论只容许四种元素的存在,即地、火、气和水.元 [265] 素只有四种,但是完美的立体却有五种:这个差异一定使人很不安吧.好在不是长久如此,因为硕学之徒在神秘思辨的一条古老的教言中找到了解释;即,"让最后的归于神明."这些立体中应该有一个属于上天,这便是了.但是是哪一个呢?

将上表略加审视,便可看出十二面体因其各面为五边形而与众不同.从另一方面说,*五边形*和黄金分割有很密切的关系(见下图).比如我们若延长五边形的各边,便可得到一个称为*五角星*的星状图形,它(且不说五角星的边正被五边形的各顶点分成神赐比例)从邃古以来就成了神秘学中的神圣象征.因此,就把立方体给予坚固的地,另各以一立体给与较变幻不定的火、气、水——在此以外,柏拉图学派就把十二面体和它的十二个五边形的面奉献给上天.



黄金分割

近代黄金分割崇拜的复活始于 19 世纪初期延续至今日.这多是艺术



家所提倡的.我们听惯了很多关于黄金比的美学价值,关于它在自然界的流行,它在人体解剖中所占的重要地位,以及它的宇宙的意义等等.人们[266]又指出黄金分割是希腊雕刻美和世界建筑精华的线索.这其中究竟能有多少事实作证明,又究竟有多少主观偏爱的成分,确是难说.上页图的左边是一个黄金分割的长方形.这种图形无疑是读者很面熟的,因为在我们身边的环境中有很多物体具有这类特殊的图样;窗子、桌子、书籍、箱子、纸牌等都是.黄金分割的专家恳切地告诉我们,这种图形是优雅的化身,大多数人都是这样看的.然而早在1876年,著名的德国心理学家费希纳(Fechner),也许是为那个时代的黄金分割家所诱引吧,他对于一大群彼此各异的人作了一系列的实验.他用十个长方形的图形,两边之比从2比5到1比1,请各人选出一个最美观的出来.黄金分割所得的票数虽比其他图形为多,但也仅及总数的三分之一.总的来说,实验结果对于这种崇拜颇为不利.

这种被推崇的优越性当然不乏"合理"的解释;最通行的解释是根据内外比(即依据极端而又中庸的理性)定义的本身.据说当我们鉴定一个长方形的时候,我们通过某种直觉的心理过程从中分出了一个正方形;若所剩余的长方形愈和原形相似,则该图形愈美观.这种解释在我看来完全只是在作文章.其他几种论调也差不多,譬如说树的形状,人体的解剖等.通过选择特别偏爱之点,就可以在人的身上发现所希望的各种图形或比例的.因此,例如,有人说人类的腰围和身高是构成神赐比例的.但是若对普通人的腰围看一眼,我想即使是最热心的黄金分割崇拜者也会觉得它离我们的美观标准太远一点了吧.

[267] 8. 质数的分布

质数在整数中的分布,其缺乏规律性的程度可以由下列两个并列的命题看出:

一、在100 000 000和150 000 000之间,至少有一百万个质数(见第3章第11节).

二、可能找出一百万个相连的整数,其间没有一个是质数.

这个陈述只不过是普遍定理下的一个特例:对于一个无论怎样大的整数 N,必可以找出全非质数的 N 个相连整数.要证明这个惊人的定理,只要推广欧几里得对质数有无限多个的证明过程就行了.

设 P 是大于 N 的第一个质数(若 N 自己就是质数,取 $P=N$),则 N 个相连的整数,

$$P!+2, P!+3, P!+4, \cdots, P!+N, P!+(N+1).$$

全是合数.因为 $P!$可以用质数 P 和小于 P 的一切质数整除;故 $P!$可以用小于或等于 $N+1$ 的任何整数 E 整除,由是得 $P!+E$ 在 $1<E\leqslant N+1$① 时均有因数 E,故不能为质数.

9. 可除性的判别准则

[268]

弃九法

任何整数以 9 除后所得的余数简称为该整数的余数;若恰可整除,则余数是 0.弃九法所依赖的定理是:**任何整数的余数等于各位数字的和的余数**.例如 29 的余数是 2;而其各位数字的和是 11,余数也是 2.作为其特例,**若某数恰可用 9 整除,则其各位数字的和也可用 9 整除**.

要证明这个定理,先证:10 或 10 的任何次乘方,其前一数总是 9 的倍数.因为在恒等式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

中,令 $a=10, b=1$,便得

$$10^n-1=9(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1).$$

又,任何数和该数的各位数字和的差总是 9 的倍数:例如任何四位数均可写成

$$\begin{aligned}(abcd) &= a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d\\ &=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d),\end{aligned}$$

这种结果自然不限于四位数,任何数都一样.

再次,设我们称两个有相同余数的数为同余数,那么很容易得出:**两数的和或差与两数的余数的和或差为同余数;又,两数的积与其两余数的积为同余数**;又,任何只由加法、减法或乘法所合成的复合运算,其结果也是如此.举例为证:

[269]

$40+29=69$(余数 6);余数(40)$=4$,余数(29)$=2$;$4+2=6$;

$40-29=11$(余数 2);　　$4-2=2$;

$40\times29=1160$(余数 8);　　$4\times2=8$.

① 原书误印为 $1<E\leqslant+1$.——译者

所以，如果一个计算的人作了一系列的加法、减法和乘法之后，得出一个数 N，其余数为 R，他在检验时，可以用原各数的余数依法计算，所得的结果的余数仍应该是 R. 这里依据的就是弃九法.

举例

设有 $f(x)=2x^3+5x^2+x+11$，今要把 $x=13$ 代入. 我们直接计算，得出 $f(13)=5263$，其余数和 16 的余数相同，即 7. 要核验这结果，我们写

$$余数(2\cdot 13^3)=余数(2\cdot 4^3)=余数(128)=余数(11)=2;$$

$$余数(5\cdot 13^2)=余数(5\cdot 4^2)=余数(80)=8;$$

$$余数(13)=4; \qquad 余数(11)=2;$$

$$余数(2+8+4+2)=余数(16)=7.$$

十一的可除性的判别准则

我们知道若 10 的乘方的后一数不是 11 的倍数，那么前一数必是，反之亦然. 事实上，两种情形是相间的，组成如下序列：

11，99，1 001，9 999，10 001，99 999 等.

用证明弃九法的相同方法，可得出一种有时被称为"间取法"的判别准则：*要判定整数($abcdef\ldots$)是否是 11 的倍数，先计算交错级数 $a-b+c-d+e-f+\cdots$；若所得的结果是 0 或 11 的倍数，那么原数便是 11 的倍数.* 例如 9 876 526 是 11 的倍数，因为 $9-8+7-6+5-2+6=11$.

[270] 七和十三的可除性的判别准则

巴斯伽看出几何级数

$$10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, \cdots$$

有一种特性：各项的前一数或后一数必是 7 的倍数. 这对于 13 也是如此. 巴斯伽从这里得出一种判别准则：*要判定一个整数是否是 7(或 13)的倍数，先把数字自右而左分成三个一组的各段，再将"间取法"用于各段上；若所得的结果是 7(或 13)的倍数，则原数也就可用 7(或 13)整除.*

举例

由整数 12 375 467① 得 $12-375+467=104$. 故原数可用 13 整除，但不能用 7 整除. 由整数 403 396 得 7，故可用 7 整除，但不能用 13 整除. 另一方面，任何有($abcabc$)形状的整数都同时可以用 7 和 13 整除.

---

① 12 375 467 误印为 12 357 467，现改正. ——译者

10. 毕达哥拉斯数

[271]

在本书中,我们已经有了一个方法以求毕达哥拉斯三角形,即满足如下的关系的数:

$$x^2+y^2=z^2. \quad (1)$$

由这方法所产生出来的毕达哥拉斯数,或者是彼此无公因数的*原始组*,如3,4,5之类;或者是如6,8,10等的*非原始组*(参看第3章第14节的表).现另外还有一种办法,它的优点是所得的只是原始组,并且还能显示出这些组的某些明显的特性.

设 p 和 q 是两个*互质*的数,其中一奇一偶.则三个整数

$$x=p^2-q^2, y=2pq, z=p^2+q^2 \quad (2)$$

成一原始毕达哥拉斯数组.反之,每一原始组也都可以这样地表示.这种表示法既常为可能,故得:

定理A **原始三角形的斜边必为奇数,且可以化成两个完全平方的和**.由此可知并非任何一个奇数都可以作原始毕达哥拉斯三角形的斜边:它必须是两个平方数的和.例如 $z=41=16+25$.于此 $p=5, q=4$;因而 $x=9, y=40$,即 $41^2=9^2+40^2$.

定理B **原始三角形必有一腰是3的倍数;原始三角形必有一腰是能被4除;原始三角形的各边必有一边能被5除.由此更得三边的积必是60的倍数**.定理的第二部分①是显而易见的,因为 $y=2pq$,而 p 或 q 二数之中,又有一个是偶数.要证明第一部分②,先看 $x=(p+q)(p-q)$,不论 p 和 q 是什么数值,四个数 [272]

$$p,q,p+q,p-q \quad (3)$$

中必有一个是3的倍数.要证第三部分,设 p 是奇数,q 是偶数,且(3)中的四个数都不是5的倍数:这样一来,p 和 q 的可能末位数必定是(1,2),(1,8),(3,4),(3,6),(7,4),(7,6),(9,2),(9,8)各组.我们极易看出由各组所作出的 p^2+q^2,其末位数必是5.

---

① 原书误印为"定理的第一部分"(The first part of the theorem).——译者

② 原书误印为"第二部分".——译者

同样的道理,我们也可以证明方程式

$$x^2+y^2+z^2=w^2 \tag{4}$$

的一切整数解,能有公式

$$x=p^2+q^2-r^2, y=2pr, z=2qr, w=p^2+q^2+r^2, \tag{5}$$

这里的 w 可以看作各边为 x, y, z 的长方体的对角线. 几个这样的毕达哥拉斯长方体为:

$$1^2+2^2+2^2=3^2,$$
$$2^2+3^2+6^2=7^2,$$
$$1^2+4^2+8^2=9^2,$$
$$3^2+16^2+24^2=29^2.$$

[273]

11. 拟似归纳法

有一种证代数恒等式的原理,首先为拉格朗日所广泛运用,因为没有适当的名称,姑名之为拟似归纳法. 此法是代数基本定理的一个推论,可述之如下:**若一个单变数的 n 次多项式,对变数的 n 个以上不同数值,均取相同的值,则不论变数为何值,多项式都取该值.** 也可以换一种更方便的说法:**两个 n 次的多项式对于 n 个以上的数值若能相等,则两式为恒等.** 让我们举例来说明这个原理的应用.

例一

考虑下列关系式

$$F(x)=\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

今把左边看作 x 的二次多项式,只要证明对于 x 的两个以上的数值能等于 1 便足够了. 但是因为 $F(-a)=F(-b)=F(-c)=1$;故 $F(x)$恒为 1.

例二

考虑下列关系式

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1\equiv(x^2+3x+1)^2.$$

[274] 左右两边都是 x 的四次多项式,只要证明有五个 x 的数值能使两边相等便是了. 我们选五个最简单的数值 $x=1, 0, -1, -2, -3$ 代进去而看出每次都相等,故所给的关系式为恒等式.

若把 x 看作整数,由这恒等式可得出如下结论:四个连接整数乘积的后继一数必为平方数.



我们若把上面所述的数学方法和经验科学中使用的归纳法作比较，初看起来它们好像实质上一样.但进一步加以分析之后，便可看出这种相像之处颇为表面化.因为第一，刚才所述的方法只是一种“简便法”罢了，它所证的命题倘用直接代数演算也能求得.第二，在作了必要的然而永远是有限次的代入手续之后，我们即得出一种绝对的数学的确定性；然而，在物理性的实验中，不论重复多少次得出相同的结果，也不能达到确定性的境地.因为经验定律的真与伪只不过是或然率的较大与较小的不同而已.（参看著者的《科学面面观》(Aspects of Science) pp.111—115，Macmillan，New York，1937）

12. 数学归纳法举例

[275]

由相连的整数的乘方所产生的级数，在许多数学问题中甚为重要.（参看附录21:“化一段抛物线为矩形”）.这种级数之和极易化成由1开始的级数：这个问题就是求以 p 和 x 的简短式子来表示：

$$s = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (x-1)^p + x^p. \qquad (1)$$

雅克·伯努利第一个发现这个 p 次方的和可以表为 x 的 $p+1$ 次多项式.例如：

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2},$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \qquad (2)$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + x^3 = \frac{x^2(x+1)^2}{4} = S_1^2.$$

我在此提到这个定理，是出于全面性的考虑.但是，我们现在的目的只在于在这类求和公式的证明中，任举其一来作为递归证法的一个应用实例.从这个目的出发，我们取公式 S_3 为例.证法中的归纳步在于验算 $x=1$ 时，公式是否成立，显而易见，此时得出恒等式 $1^3 = 1^2$.至于遗传步则假定公式在 x 等于某一整数 n 为真时，证明其在 $x = n+1$ 时，在逻辑上必然为真.换言之，我们要证明等式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

乃是另一等式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

[276] 的数学推论.一个简便的证法,亦即求和公式的一个常用证法,乃是将两个等式相减,在本例中得出恒等式

$$(n+1)^3=\frac{1}{4}(n+1)^2[(n+2)^2-n^2]=(n+1)^2(n+1).$$

这个公式用语言表示就是:*由 1 起若干个连续整数的立方和是一个完全平方数,即这些连续整数的和的平方*.这个命题好像早在 13 世纪时就为菲波纳契所知道了.

数学归纳法的另一例子,请读者参阅棣美弗恒等式的证明(附录 25).

[277]

13. 论有界几何

(节录自著者的《科学面面观》pp.25—26,Macmillan,1937)

"经验几何学在本质上是一种有界几何,要建立起这种几何的普遍定律,是一件极为困难的事.例如,设把你的书桌的桌面当作几何研究的全部范围.你必须区别许多类直线:有的从桌面的四角引出来;有的和桌面的两邻边相交;有的和两对边相交;有的是对角线;还有的和桌边成直角等等.任意取四个点,若问连接前两点的线和连接后两点的线是否相交:你必须先确定这两根线各属于那一类直线,才有办法作出回答.如果进一步想分析一切可能的场合以建立出一条准则,以判断两直线是否相交,那么你就要建立一条定律,其难度若和建立英语不规则动词过去式的规律比起来,后者不过是小孩子的玩意了.

"在一种有界几何中,已知圆心和半径而作圆,或外接于三角形作圆,或由一点作一直线的垂线等问题,一般地都是无解的.两根直线常不能构成一角,三条直线常不能围成一个三角形.说一个三角形和另一个三角形相似,若比率大于某一定值,便完全无意义.一点到一直线的最短距离不一定是垂线等等.

[278] "即令你已掌握了这种复杂的几何,你的困难也才刚刚开始.因为如果你的几何的边界由桌面长方形一变而为其他围线,例如三角形、圆形或卵形,你又要全部从头开始.有界几何的特点就在于:其规律随边界的性质而异.这里又可以和语言来类比:有界几何的规律有如各种语言的文法:每种边界需要一组不同的规律.这些规律中有的是为各种边界所共同具有的,但也有显著例外的因边界不同而出现的差异,这就和英文与法文的不规则动词的差异一样.如果平面范围内的经验几何的情形已是如此,

则立体图形的繁难更将何如呢?

"因此,十分显然,我们如自限于有限的边界以内,演绎法就没有什么用了:几何学将仍停留在描述性科学的阶段,不会比动物学、植物学或矿物学有更大的普遍性".

14. 方程的图解法

[279]

解析几何是一种代数——几何字典,这并不是一个新的观念:实际上,在这门数学的创始人,费尔马和笛卡儿的著作中,已隐约可以看见这种思想.这是一种极好的比喻,因为它表明了这门学问的对偶性.一方面,它用代数表达出了几何的某些基本关系,可使几何的问题化成符号和数字的演算;另一方面,它将代数恒等式和基本式,解释成几何的图形和性质,使抽象的概念转变为具体的图象.本节所讨论的只是解析几何的第二方面,特别是限于有助于分析和解答一元代数方程这一点上.

作为此中技巧的根据的,是下面的命题:*解两个二元方程,一为 m 次,一为 n 次,可以化成解一个一元 mn 次方程*.这个命题称为贝祖(Bezout)(1730—1783)定理,但在他之前,早已有人猜测出和使用过.例如两个*二元二次方程*,可以消去一个元而得出一个*一元四次方程*.丢番都和裁默·伽亚谟都熟悉这种事实,裁默·伽亚谟甚至还产生了把这种过程反过来的一种天才的想法——即把解一元四次方程化为解二元联立二次方程.

如果我们把一个 x 和 y 的 m 次方程解释为一条 m 次的曲线,则贝祖定理的图解意义便是*两条分别为 m 次和 n 次的曲线相交于 mn 点*.不过,显然地,这种说法只有当我们已经学会了解决虚根和一元方程的等根问题才是有意义的(参看附录 24).

[280]

我们以"缺项"的一般四次方程为例:

$$x^4+px^2+qx+r=0, \qquad (1)$$

式中缺三次项.我们可将此四次式看作两个二元方程

$$y=x^2 \quad \text{和} \quad x^2+y^2+ux+vy+w=0. \qquad (2)$$

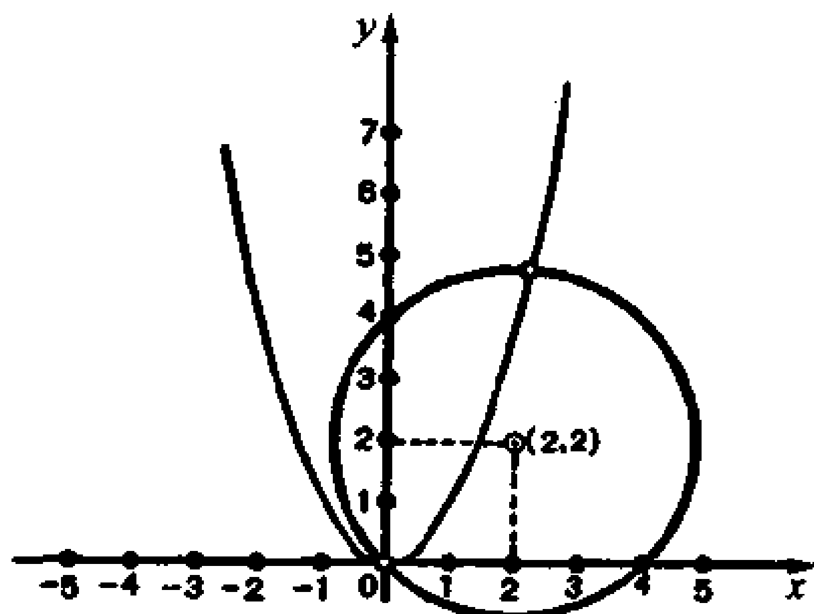
消去 y 的结果.这两个方程,第一个可以解释为一个抛物线,第二个为一个圆.*这时若在平面上画出一个完全的抛物线,则最一般的三次和四次方程式都可以用直尺圆规求解*.其理如下:

一、比较(1),(2)两式,我们可以由 p,q,r 的数值计算出系数 u,v,w,因而得出圆心的位置和半径.

$$x^4+(v+1)x^2+ux+w=0;\ u=q,\ v=p-1,\ w=r. \quad (3)$$

二、若原四次方程为非缺项方程：$x^4+kx^3+px^2+qx+r=0$，我们可

[281] 用简单的变换 $x+\frac{k}{4}=x'$，将它变成缺项的形式.



方程的图解法

三、任何三次方程可以当作一根为零的四次方程看待，因为三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根同时也是四次方程 $x^4+px^2+qx=0$ 的根. 再者，若该三次方程为非缺项，也可以用类似于上面的方法变成缺项的三次方程.

举例

三次方程 $x^3-3x-4=0$. 把四次方程 $x^4-3x^2-4x=0$ 和(3)相比，求得 $u=-4, v=-4, w=0$. 故圆的方程是 $x^2+y^2-4x-4y=0$. 这圆通过原点，圆心所在的点是 $x=2, y=2$. 除原点是一个额外根外，圆和抛物线另于横坐标约为 2.2 处的唯一个实点相交. 将 2.2 实际代回方程，不得 0，而得 0.048. 故图解法所得 $x=2.2$ 为原方程的实根的比较准确的一个近似值.

[282]

15. 几何中的"可能"和"不可能"两个术语

(选录自作者即将出版的《几何的故事》中的一章)

二倍立方体，三等分角，化圆为方，以及其他由古人遗留给我们的这

类问题,其困难所在并不在于问题的本身.这些困难只不过反映出古典的禁锢的严格性,其中几何作图只限于直尺和圆规.

用于几何作图的"可能"和"不可能"两个术语并无绝对的意义:在每种作图法中必先规定作图所用的工具.确实,若是除去一切限制,设若一切有几何意义的器具都和传统工具有同样的权限,设若一切几何轨迹,不论是由机械法得出,或由某种图解法得出,都和直线及圆享有同等的待遇——那么,"可能"和"不可能"两词将失去一切意义,因为可解的问题就和所有的问题外延相同了.

在古典的作图中,所用的工具隐而不提;现代方法则把工具摆在最前面.每件工具都看作它所能解决的一组问题的"代表".所以我们有只用直尺可解的问题所组成的直线域;有只用圆规可解的圆域;有包括前两域以及其他一切须并用直尺和圆规始可解决的问题的古典域或传统域.在传 [283] 统域之外,还有一个古典工具所不能胜任的各种问题组成的广大的域.

16. 相等的意义 [284]

设有一关系,若它在 A 与 B 之间成立,且在 B 与 C 之间成立,也必在 A 与 C 之间成立,这种关系便称为传递的.例如,血统关系为传递关系,父子关系则为非传递的.数学上传递性的例子有相等、全等、平行等;非传递性的例子则有重叠、内接、外切等.故若一图形 A 内接于图形 B,B 又内接于 C;但图形 A 并不内接于图形 C.

传递原理包含于下述命题中:设两件事物在某方面等价于第三件,则原两件也等价.这个原理在许多问题中极为重要.例如在几何中,我们有两段线,若能移动一段使和第二段重合,我们就称这两段为全等:严格说起来,我们必须把平面的一部分割下来放到另一部分上才能作到.但实际上我们自然并不这样去作:我们使用的是圆规或有分度的尺,在这些情况下我们是借助于两线段与第三线段全等则必彼此全等的道理.在数学中,我们每将一个等式化成另一等式时,我们也经常求助于传递原理,虽则有时暗含地使用.总而言之,数学上相等的最基本的性质,就是它的传递性.至于物理上相等的情况又如何呢?关于这一点,著者可以节录我在别处所论的一段如下:

"为使这点尽量具体起见,请读者设想面前有若干钢条,各条除长度互异之外,完全相同.为了确定起见,设它们都在实验室中精确地量过,长

[285] 度由 30 毫米到 50 毫米；在这中间，特别有标有 A，B，C 的三条长度顺次为 30，31，32 毫米．然而关于这一点你根本不知道——而且你也不必知道，因为知道了反而会有成见；因为你现在的目的在于确定单用你的感官，你能建立一种什么样的量度技术．

"你首先把 A 和 B 并排摆起来：你发现你的眼睛和指尖都不能辨别出二者长短之间有何不同；因此你宣布它们相等．你复又取 B 和 C 作同样的比较；你得出这两根钢条的长度也相等．接着你再把 A 和 C 并排摆起来；可是现在你的眼睛和指尖都能清楚地辨别出来 C 比 A 长．你便得出惊人的结论：两件东西可以同时相等于第三件，但彼此却不相等．

"但是这个结论和数学的一条最重要的公理，两量均等于第三量则彼此必互为相等，直接冲突．这条公理是大部分算术运算的根据；没有它，等式的变换和解方程都是不可能的．我更用不着说，没有这条公理，数学也就建立不起来了．重要的事实是，物理学家都不采用这种现代主义的办法，而是采用以这条公理为基石的古典数学．

"物理学家有什么权力作出这种选择呢？是不是因为采用了科学的量度方法以代替直接感觉，就能够删除这个矛盾呢？不是的！任何量度方法的最后目的总是要读出格度来；所以不论仪器设计者如何巧夺天工，归根结底，他仍然必须依靠某位观察者的感官——特别是视觉．另一方面，我们对读格度的行为越是细加考察，就会发现它和上举的钢条的假设例子，并无本质上相异之处．实在说来，刚才的界长度是一毫米，现在可

[286] 以使缩小到一微米；通过放大和用各种精密化的措施以使量度仪器，更加灵敏，使其甚至能准确到一微米的若干分之一．但不论改进到何等程度，显然仍不能除去上述的困难，甚至也不能减轻其程度；因为到了最后，所得出的资料数据，仍然会使我们说：'我看见 A 的量度与 B 的量度相等；我也看见 C 的量度与 B 相等；但是我又明明看到 C 大于 A'"．（参看《科学面面观》pp.90—92，Macmillan，1937）

[287]

17．无理数量的有理近似值

求得一个有理数的序列，令其极快地逼近一个数的平方根作为极限，这个奇妙的方法是纪元前 1 世纪的亚历山大利亚的希罗所创始的．希罗算法所根据的两个观念精巧而又简单．第一个是：设 p，q，N 为三个正数，且 $pq=N$．那么，或者 p 和 q 两数为相等，不然必是一个大于 $\sqrt{N}$，一个小

于$\sqrt{N}$.若我们称这两数 p、q 是关于$\sqrt{N}$的反数，则$\sqrt{N}$必介于其任何两反数的中间.例如$\frac{3}{2}$和$\frac{4}{3}$的积为 2，故$\sqrt{2}$介于这两数之间.

第二，若 N 是一个非完全平方的整数，并设$\sqrt{N}$介于两个相连整数 E 和 $E+1$ 之间.现在如果某数 p 介于 E 到 $E+1$ 的范围之内，则其反数 q 也必在此范围内，而 p 和 q 两数的算术平均数$\frac{1}{2}(p+q)$也在该范围之内.同时，我们还能够证明——这点实是希罗方法的主旨——这算术平均数比 p 和 q 都近于$\sqrt{N}$.故此，以$\sqrt{2}$为例，$\frac{3}{2}$可看作$\sqrt{2}$的一个近似值，其反数$\frac{4}{3}$也可看作其一个近似值；而两数的算术平均值$\frac{17}{12}$则是比$\frac{3}{2}$或$\frac{4}{3}$更为良好的$\sqrt{2}$的近似值.

所以，要计算$\sqrt{N}$的近似值，我们先在 E 和 $E+1$ 之间选出一数 p_1，名为第一近似值.我们再算出 p_1 的反数 q_1 和它们的算术平均数$\frac{1}{2}(p_1+q_2)=p_2$，我们称 p_2 为第二近似值；同样，我们可算出 $p_3=\frac{1}{2}(p_2+q_2)$.循此可得出两个有理数序列：$p_1, p_2, p_3, \cdots$；和 $q_1, q_2, q_3, \cdots$.它们均逼近同一 [288] 极限，即$\sqrt{N}$，但一个自大而小，一个自小而大.兹将$\sqrt{2}$的计算列表如下，以作为本法的例证：

近似值		反数	算术平均数	区间长
第一	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{1}{6}$
第二	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{1}{204}$
第三	$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$	$\frac{655\,857}{470\,812}$	$\frac{1}{235\,406}$

实际上$\frac{577}{408}\approx 1.414\,215\cdots$，而$\sqrt{2}=1.414\,213\,6\cdots$.

18. 论三等分角

要想证明单用直尺和圆规不能三等分一任意角，只要证明有某特别 [289] 角不能三等分显然就够了.所以在本节中，我们将证明 60°的角不能用圆

规和直尺分成三等分.

设 ABC 是一个等边三角形,每边长 2 单位.设 c 角的三等分线交对边于 M 及 N:我们令 $AM=BN=x$, $MN=y$, $CM=CN=z$. 在这三个未知数之间有三个方程

$$2x+y=2; \tag{1}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{z}; \tag{2}$$

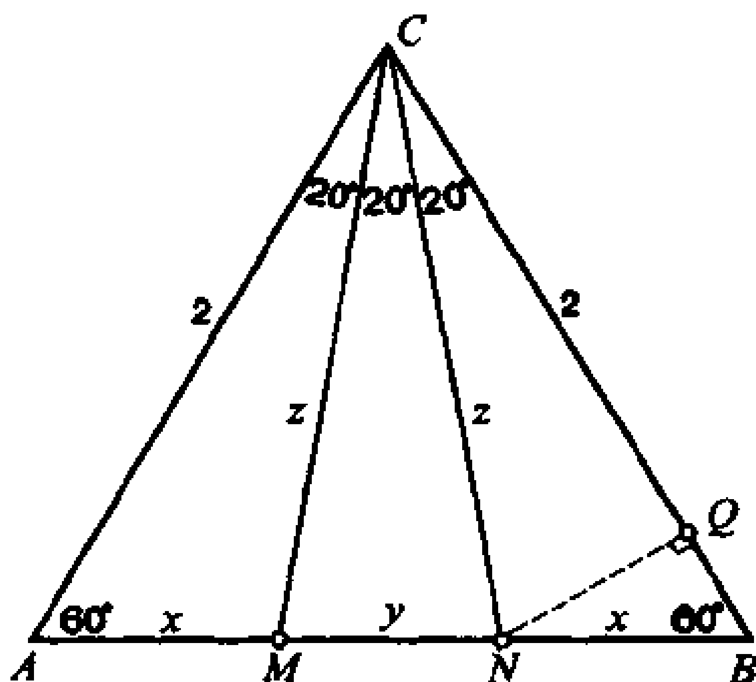
$$z^2=x^2+4-2x. \tag{3}$$

方程式(2)是由于 CM 是 ACN 三角形的分角线,(3)则由于应用毕达哥拉斯定理于三角形 CQN. 在三个方程式中消去 y 和 z 即得:

$$x^4-2x^3-12x^2+32x-16=0. \tag{4}$$

这个四次方程有一个根等于 2,显然不是我们问题的答案.其余三个根即是以 $x-2$ 除原方程左边所得的三次方程的根,即得方程式

$$x^3-12x+8=0. \tag{5}$$



[290] 但任何有有理系数的三次方程,都出不了下列三情形之一:

一: 三个根都是有理数.

二: 一个根是有理数;其余两个根是共轭的二次无理数,即 $p\pm\sqrt{q}$ 的形式,而 p 和 q 是有理数.

三：三个根都不是有理数；那么，三个根都是不可约的三次无理数.在这种场合，这三次方程称为不可约的.

方程(5)是属于第三类；要证明这点，只消验证其没有有理根就是了.这方程若有有理根，就只能是±1，±2，±4，±8；但直接代进去加以验证，可以看到它们都不能满足我们的方程.

所以 x 既不是有理数，也不能用二次无理数表示出来.这也就是 M 点不能用直尺和圆规定出的另一种说法. [291]

这里所举的证法也许比平常的证法稍为麻烦，但它的好处在于不用三角公式.

19. 斯涅留斯近似法 [292]

有一种以简单准确而又用途广泛而著称的作图法，它为荷兰物理学家威勒布洛德·斯涅尔(Willebrord Snell)所首创.他的著作以拉丁化的名字斯涅留斯(Snellius)发表.他尤其以发现著名的折射定律而闻名于世.

设 AP 为圆心为 O 的圆弧；在直径 AB 的延长线上截取 $BS=OB=OA$；联结 S 和弧的另一端点 P，并延长 SP 使交切线 AZ 于 T 点.斯涅留斯看出，在弧 AP 所对的圆心角 Q 足够小时，切线 AT 可以取作弧 AP 的近似值.即使在其中心角是一直角的极端情况下，其误差也不过百分之四，由此可看出这种近似值的准确程度.

若干著名的问题都可以化归到斯涅留斯近似法的范围之内.兹举三例如下：

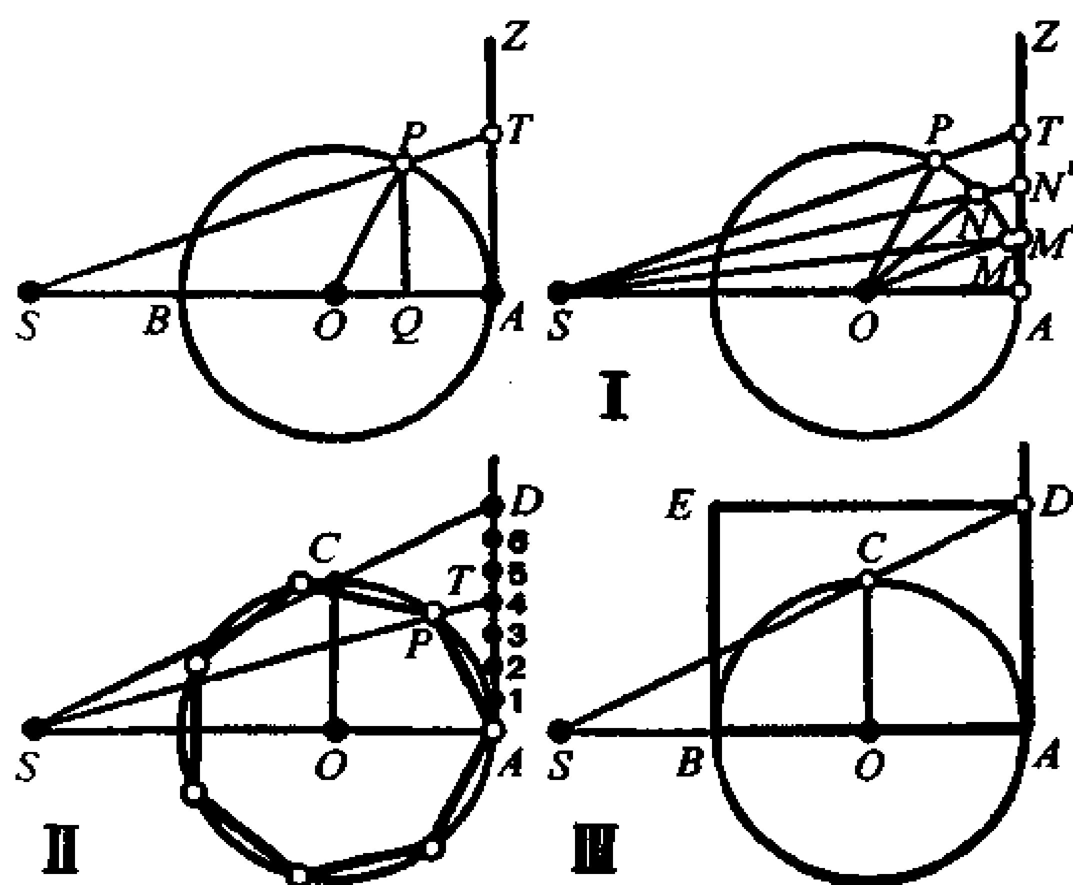
一、多等分角.更特别的是，三等分角(见图Ⅰ).设有 AOP 角要用近似法分为三等分：设 T 为相应于 P 的"斯涅留斯点"；用直尺和圆规平分 AT 为三等分：$AM'=M'N'=N'T$，联结 M'，N' 到 S；线分 SM' 和 SN' 在圆弧上截出 M 点和 N 点，这就是弧 AP 的近似三等分点.

二、正多边形.图Ⅱ表示正七边形的近似作图法.这个问题本来不是直尺和圆规所能胜任的.设 AOC 为直角，D 为 C 的相应"斯涅留斯点"；平分 AD 为七等分，使 $\frac{AT}{AD}=\frac{4}{7}$；若 ST 交圆于 P，则弧 AP 近似于直角所对的弧的七分之四，从而，弦 AP 近似于圆的内接正七边形的一边.这种作图法自然适用于任何边数的正多边形.

三、化圆为方.用前问题的记号，得 AD 近似于一个象限的弧长，即

$\frac{1}{2\pi R}$,在此,R 是圆的半径.故长方形 $ADEB$ 的面积是圆的近似面积(见图Ⅲ).

[293]



[294]

20. 论时间的本性

(节录自著者的《科学面面观》pp.199—201,Macmillan,1937.)

"我的意识所证实的是这个现在;我的心中所回想的是其他若干个现在,这若干个现在随着向过去隐退,逐渐变得模糊,终于消失在朦胧的记忆中,我把这些含糊而又相叠的短暂的时间序列附属于同一个个别的人,此人我称之为我.在若干年时间内,这人的每一个细胞都改变了;他的思想、判断、情感和意志都起了类似的变化.那么我指称为我的那个不变的东西究竟是什么呢?自然不是使这个个别的人有别于众人的那个名称!那么是否就是如累珠般串在记忆之线中的时间序列呢?

"一个断断续续的散乱的回忆组成不连贯的序列,从婴儿时期的某时开始,直到现在猝然结束为止;这就是作为意识的直接材料的时间.但当

这种原料经过一种所谓物理直觉的神秘提炼过程之后，情形就完全不同了.直觉的时间是外推的时间——它推过了意识的开端而伸入了无限深远的过去，推过了现在而伸入了无限的未来，这个未来也和过去一样，被看作是由若干个现在所组成的.我们用一种心理的动作把时间分成两类：过去和未来，两者互不相容，而总括起来就包括了整个的时间，即永恒.我们心中的现在只是分割过去和未来的一个分划；而因为过去的每一瞬间都曾经是一个现在，未来的每一瞬间也将是一个现在，故过去或未来的每一瞬间都被我们看作是这样的一个分划.

"只是这样就完了吗？不，直觉的时间又是内推的时间：在过去的任 [295] 何两个瞬时之间，不论它们在我们的记忆中是如何地接近，我们都可插入——又是用一种心理的动作——其他的瞬间，且其数目是无限的.这就是我们所谓的过去的连续性；未来也被我们赋以相同的连续性.在我们的心中，时间是一条溪流；不错，我们的经验所知的，只是溪流中的各不相连的元素；可是我们的直觉将经验所得的空隙填补起来；它将时间变成一个连续统，变成自然界一切连续体的原型.

"举例来说，假使不是确信一根直线可以通过我们手的一次不断移动而绘成，那么，我们所说的几何直线具有完全的连续性是什么意思呢？我们将时间延续的这种溪流性移到一切物理现象上：我们要分析一种现象时，不论它是声、是光、是热、是电，首先就是设法把它用质量、距离或能量以表示之，这样即可把它化成时间的函数了.

"连续和不连续之争，不只是辩证学派的产物：它在思维产生之初即已存在，因为它不过是时间的溪流状概念和一切经验的不连续性质之间那种一直存在的不一致的一种反映.分析到最后，数概念基于计数，即点计不连贯的、个别的、断续的事物；但时间的直觉则将一切现象描画成流性的.要将一种物理现象还原为数而又不破坏其溪流性——这是数学物理家的艰巨的工作；而且，广义上说，几何也应当看作物理的一个部门."

21. 化一段抛物线为矩形 [296]

"在那些几何开拓者中，有人企图证明作一矩形和圆等积是可能的……但据我所知，尚无人去求抛物线弧及其所对的弧所围成的面积.这就是本文已经做过的事情；因为我们在此已证明这种抛物线弓形的面积等于同底同高的三角形的三分之四."

这是差不多在积分学发明的二千年以前，阿基米德给他的朋友多齐西奥斯(Dositheos)的信中所写的. 他对最普遍形式，即不论其为图 I “正”的，还是图 II “斜”的任一抛物线弓形，证明了这个定理. 事实上，在前面所引的导言之后的正文中，阿基米德得出该定理的三个等价形式：即抛物线形 $POQNP$ 的面积等于三角形 POQ 的 $\frac{4}{3}$，或等于三角形 PTQ(其三边为抛物线的弦和两端的切线)的 $\frac{2}{3}$，或等于平行四边形 $PUVQ$(其两对边为抛物线的弦和平行该弦的切线，其他两对边则平行于抛物线的主轴)的 $\frac{2}{3}$. 要证明这定理，阿基米德先证得若干预备定理，其中有：*连接弦的中点和弦端两切线相交点的直线平行于主轴；这线的中点在抛物线上；这中点处的切线平行于该弦等.*

我们读他这封“信”时，很惊叹他所用的各种办法的巧妙. 尽管这些办[297]法无疑是极为聪明的，但今人对其中的多数方法很难给予赞赏，因为它们大都缺乏一个符号体系，而且和所有希腊人一样，不敢大胆地用数标出位置. 不过在其证明中有三个要点却具有很重要的历史意义：第一，问题的处理是属于*机械性质的*，因为阿基米德一开始就运用了他所发现的*杠杆原理*；第二，他的证明所根据的是抛物线的性质，这种性质即我们今日用该曲线的*标准方程* $x^2 = Ly$(参看第 10 章第 11 节)表示出来的；第三，他所用以完成其证明的*极限法*，就是本书再三引证过的影响深远的*穷竭法*. 我在这里特别要强调的是第三点. 为此目的，我在下面举出阿基米德的一个证明，不过我只是依照这位大师的精神，而不是拘泥于他的文字.

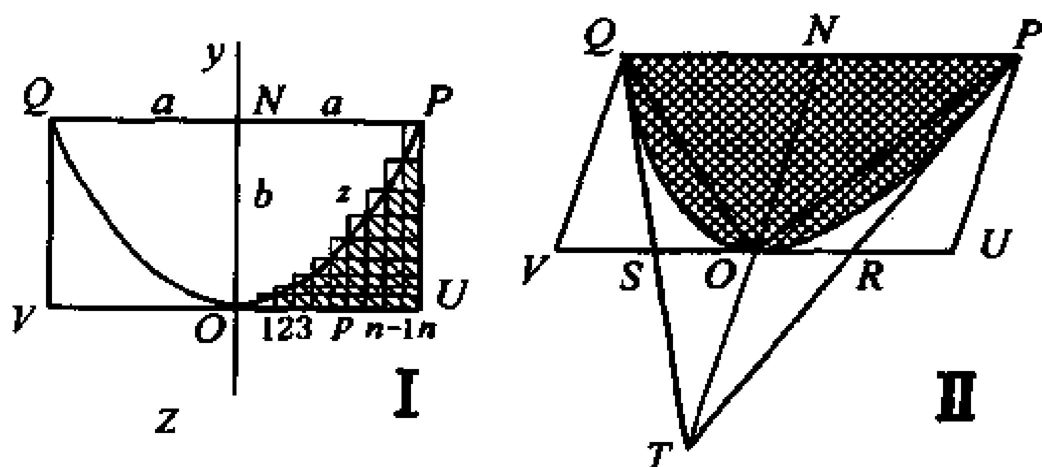


图 I 是一个"正"抛物线弓形，底宽为 $2a$，高为 b，是面积为 $2ab$ 的矩形 $PUVQ$ 的一部分：显然，我们若能证明图形 $OZPUO$ 的面积等于 $\frac{1}{3}ab$，则定理便得到证明了．令以主切线和轴为坐标轴，抛物线的方程为 $\frac{y}{b}=\frac{x^2}{a^2}$．将 OU 分为 n 等份；令 Z 是抛物线上相应于第 p 个等分点的点；则点 Z 的坐标很易算得为

[298]

$$x=\frac{p}{n}a,\quad y=\frac{p^2}{n^2}b.$$

我们以相等的诸底，即 $\frac{a}{n}$，并以各纵坐标为高，作一些矩形．对于每一分点有两个矩形；其面积为

$$\text{上矩形}\quad \frac{a}{n}\cdot\frac{p^2b}{n^2}=\frac{p^2}{n^3}ab;$$

$$\text{下矩形}\quad \frac{(p-1)^2}{n^3}ab.$$

这样，我们得出两个"阶梯状"的图形，第一个图形的面积大于抛物线下的面积，第二个的面积小于该面积．若以 Γ 表示所求的面积，即得

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}ab>\Gamma>\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(p-1)^2}{n^3}$$

两个分数的分子都是二次的乘方级数（参看附录 12）．故得

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}ab>\Gamma>\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}ab;$$

即

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)ab>\Gamma>\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)ab.$$

现令分段的数目增至无限：则不等式的两边均趋于同一极限，即 $\frac{1}{3}ab$．依照穷竭法原理，其中间量 Γ 也必趋于该极限，于是命题得以证明．

22．论 计 算 术

[299]

一般的无限算法，特别是无穷级数，其在实用上的重要性在于给函数求值提供了方便．我们只要指出下述情况就行了，我们的对数表、三角表、椭圆函数表、贝赛尔（Bessell）函数表、概率论和观察理论中的各种函数表，以及工程中和实验室内日常使用的许多表——通通都是由无穷级数计算

出来的.

一个问题要可以用数学来处理,第一步工作就是法国人所说的 la mise en équation,即表述为一种形式,使数学分析法可以用得上.这第一步通常把问题缩小为确定一微分方程所规定的某种函数关系.也许这个关系就是一个古典函数,即已有数值表的函数:于是数学家的作用就完成了.不然的话,第二步工作就是推求一种方法以制作这函数的表,这种方法照例是采取一种收敛的无穷级数的形式.但是此时数学家的工作决不能说已经完成了,因为他既然不愿作实际的数字计算工作,他就必须提供给专门计算工作者以某种估量其结果精确度的方法.在无限算法中,截至某步为止时所生的误差,其估价会引起许多复杂的问题,要避免在估计误差时发生错误,这是需要相当的数学技巧.

[300] 我们可举计算自然对数的级数为例:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

级数中的 x 是介于 -1 和 $+1$ 之间的数.设我们的演算只取级数的前面两项,问误差会有多大呢? 其误差 E 必小于以$\frac{x^5}{5}$为首项并以 x^2 为公比的几何级数的和,亦即为

$$E<\frac{x^5}{5(1-x^2)}.$$

例如,取 $x=\frac{1}{3}$,则由级数的前两项算得 2 的自然对数为$\frac{56}{81}=0.691$,所生的误差小于 0.002.

再举一例,试看用来计算角的正弦的级数,这里的角是以弧单位计:

$$\sin\theta=\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots,$$

这是一个交错级数,这种级数取前有限项的误差必小于所弃去的各项中第一项的绝对值.例如,假定我们要计算$\frac{1}{10}$弧单位角的正弦值.若只取用首二项,我们得出其值为$\frac{599}{6\,000}=0.099\,833\,3\cdots$.其误差

$$E<\frac{1}{5!\times10^5},\text{即 }E<\frac{1}{12\,000\,000}<0.000\,000\,1.$$

故 $\sin\frac{1}{10}=0.099\,833$,准确到六位小数.

23. 论连分数

[301]

若一个连分数中的各分子都是 1,各分母都是正整数,则该连分数称为简单连分数或正则连分数.在这种场合中,可用一种简便写法,即:

$$a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=(a;b,c,d).$$

牛顿的老师约翰·华利斯(John Wallis)发明了一种计算连分数的相继各渐近分数的方法,这方法在正则连分数的情况下变得特别简单.兹将华利斯算法所算得黄金分割比(见附录 7)和$\sqrt{2}$(见第 8 章第 13 节)的展开值,例如下表.

$$r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=(0;1,1,1,\cdots).$$

连分数的各项	0	1	1	1	1	1	1	1	1
各渐近分数的分子	0	1	1	2	3	5	8	13	21
各渐近分数的分母	1	1	2	3	5	8	13	21	34

$$\sqrt{2}=(1;2,2,2,\cdots).$$

连分数的各项	1	2	2	2	2	2
各渐近分数的分子	1	3	7	17	41	99
各渐近分数的分母	1	2	5	12	29	70

算法乃是根据下表所示的华利斯循环公式:

[302]

连分数的各项	·	·	·	·	·	·	p
各渐近分数的分子	·	·	·	·	A'	A	$pa+a'$
各渐近分数的分母	·	·	·	·	B'	B	$pb+b'$

该无限连分数截取到某点时所生的误差,换言之,令该连分数等于其某个渐近分数时所生的误差,是很容易估定的:设$\frac{A}{B}$是渐近分数,则

$$E<\frac{1}{B^2}.$$

例如$\sqrt{2}=\frac{99}{70}=1.414\,2\cdots$,其误差小于$\frac{1}{71^2}$,即,小于 0.002.

[303]

24. 论三次方程

以下所举是得出三次方程的代数解的简单方法.所根据的思想有两点:第一,设两未知量的和 s 与积 p 为已知,这两未知量必是一个二次方程式的根,即

$$z^2 - sz + p = 0. \quad (1)$$

第二,由恒等式

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab). \quad (2)$$

令 $a = x, b = -u, c = -v$,则得

$$x^3 - (3uv)x - (u^3 + v^3) = (x - u - v)(x\text{ 的二次式}).$$

由此可以推得缺项三次方程(参看附录 14)

$$x^3 - (3uv)x - (u^3 + v^3) = 0 \quad (3)$$

的三根中有一根是 $u + v$.

我们试以邦别利方程(参看第 10 章第 3 节)来作为本方法的应用的例证:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (4)$$

我们的问题变成求 u 和 v 两数,使

$$uv = 5, \quad u^3 + v^3 = 4. \quad (5)$$

[304] 现在所求是两个未知数,其和为 4,其积为 125;故 u 和 v 为

$$z^2 - 4z + 125 = 0. \quad (6)$$

此二次方程之二根;解之得

$$u^3 = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11i, \quad v^3 = 2 - 11i. \quad (7)$$

故邦别利方程的一根是

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}. \quad (8)$$

以同法应用于一般三次方程时,即得出所谓的卡尔丹—塔尔塔利亚公式.

[305]

25. 棣美弗恒等式

棣美弗恒等式相当于下列公式:

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^p = \cos p\omega + i\sin p\omega,$$

式中的 ω 是任意角，p 是任何实数，i 是虚数的单位，即$\sqrt{-1}$. 这个恒等式的证明，所根据的是下面的预备定理：设 p 和 q 是使棣美弗恒等式成立的两个实指数，则以 $p+q$ 为指数时，恒等式也能成立. 因为既然假定了

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^p = \cos p\omega + i\sin p\omega,$$

$$和(\cos\omega + i\sin\omega)^q = \cos q\omega + i\sin q\omega.$$

我们使两边各相乘，并用三角学的和角公式得出

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^{p+q} = \cos(p+q)\omega + i\sin(p+q)\omega.$$

依照数学归纳法，可以立即证明此公式在指数为正整数时均为真：因为它在 $p=1$ 时显然是真的，而若设 $p=n$ 时为真，令 $q=1$，由上述预备定理可得 $p=n+1$ 时也必为真.

要证明这恒等式对于负整数也能成立，我们一定要记住

$$(\cos\omega + i\sin\omega)(\cos\omega - i\sin\omega) = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1.$$

但这可以写为

$$\cos(-\omega) + i\sin(-\omega) = \cos\omega - i\sin\omega = \frac{1}{\cos\omega + i\sin\omega}$$

$$= (\cos\omega + i\sin\omega)^{-1},$$

由是得出 [306]

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^{-p} = \cos(-p\omega) + i\sin(-p\omega).$$

要证明这恒等式对于 p 的任何有理数值都能成立，显然只要证明当 p 为整数分之一（即 $p=\frac{1}{n}$）的场合就够了. 而

$$\cos\omega + i\sin\omega = \left(\cos n\frac{\omega}{n} + i\sin n\frac{\omega}{n}\right) = \left(\cos\frac{\omega}{n} + i\sin\frac{\omega}{n}\right)^n.$$

由此推得

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\omega}{n} + i\sin\frac{\omega}{n}.$$

最后，引用狄德金或康托尔的无理数理论，即可证明本恒等式对于无理指数亦可适用，所以本定理在最普遍的情形下成立.

26. 数学和实在性 [307]

（节录自著者的《科学画面观》一书，pp. 269—270, Macmillan, 1937）

“数学和实验从来也没有像现在这般稳固地统治着新的物理学，然

而，一种普遍的怀疑主义却影响了它们的有效性．已经发现人类对于这两种方法的绝对有效性的信仰，其根源来自拟人化；二者都是在信条上建立起来的．

“数学建筑在确信人类可以平安地前进，好像具有无限的记忆能力和无尽的生命，如果除去这种确信，数学就会像纸板房子一样倒塌．无限算法的有效性正是建筑在这个假定的基础上，这种算法统治了数学分析．但是问题还不止于此：若是除去了这个假设，算术本身就将丧失其普遍性，因为我们的整数概念与此假设是分不开的；几何和力学也是如此．这种大变动，随而又会使物理学的建筑大厦彻底倾塌．

“经验的有效性乃是以我们相信未来将与过去相似为基础．我们所以这样相信，因为一系列在我们看来性质相似的事件显出某种趋势，该趋势显示出常驻性；我们还相信：若它在过去愈是一致地和规则地表现出来，则这种常驻性在未来便将愈加可靠．而这种为一切经验知识所依据的推理，其有效性只不过是建立在人类对确定性和常驻性的追求的基础之上而已．

“我们未经组织的经验和有系统的实验二者之间有这样一个不可逾越的鸿沟！我们的检验和量度的仪器（它们是日久成习而被我们看作是[308]我们感官的更精确的延伸），是否也不过如同灌了铅的骰子一样对于所求测定的事物早已预含成见了呢？我们的科学知识，对我们感觉所得的含糊变幻的世界来说，是否只不过是一种用数字来冒牌顶替的巨大谋划（尽管是不自觉的）呢？颜色、声音、温暖已化成了振荡的频率，滋味和气味也变成了化学公式的数字标号，难道这些就是浸透了我们的意识的那种实在性吗？”

进一步阅读的参考书目

[309]

著者谨提出与本书所论的各个主题有关的下列参考书目，以供想作进一步了解的读者之用.在编集本表时，首先选择的是，各有关问题中具有权威性而又最少带有技术性的英文著作.

第1章　关于数的语言的起源：

Connant, L.L. The Number Concept. Macmillan, 1896.

Du Pasquier, L.G. Developpment de la Notion du Nombre. Paris, 1921.

De Villiers, M. The Numeral Words. Witherby, London, 1923.

第2章　关于算术符号的历史：

Cajori, F. History of Elementary Mathematics. Macmillan, 1917.

Karpinski, L. History of Arithmetic. New York, 1925.

第3章　关于整数：

Ball. W.W.R. Mathematical Recreations. Macmillan, 1892.

Hardy, G.H. Some Famous Problems in the Theory of Numbers. Clarendon Press, 1920.

第4章　关于无限：

Poincaré, H. The Foundations of Science. Science Press, 1921.

Couturat, L. De l'Infini Mathematique. Paris, 1896.

第5章　关于有理数：

Whitehead, A.N. An Introduction to Mathematics. Holt, 1911.

Clifford, W.K. The Common Sense of the Exact Sciences. Apple-

ton, 1888.

第6章　关于无理数：

Manning, H.P. Irrational Numbers. Wiley, 1906.

Russell, Bertrand. An Introduction to Mathematical Philosophy. London, 1919.

[310] 第7章　关于连续性：

Hilbert, D. Über das Unendliche. In: Grundlagen der Geometry. Leipzig, 1930.

第8章　关于无限算法：

Hardy, G.H. Pure Mathematics. University Press, 1925.

第9章　关于实数：

Dedekind, R. Essays on Number. Open Court, 1896.

第10章　关于复数：

Argand, R. Imaginary Quantities and their Geometrical Interpretation. Van Nostrand, 1881.

Rupert, W.W. Famous Geometrical Theorems and Problems.

第11章　关于集合：

Cantor, G. Contributions to the Founding of Transfinite Numbers. Open Court, 1915.

第12章　关于数学概念的实在性：

Davis, H.T. A Survey of the Problem of Mathematical Truth; Introduction to Helmholz's Counting and Measuring. Van Nostrand, 1930.

Poincaré, H. Dernières Pensées. Paris, 1913.

传记：

Bell, E. Men of Mathematics. Simon and Shuster, 1937.

Ganesh Prasad. Some Great Mathematicians of the Nineteenth Century. Benares (India), 1933.

一般数学及科学书籍：

Davis, H. T. Philosophy and Modern Science. Principia Press. Bloomington, 1931.

Dantzig, T. Aspects of Science. Macmillan, 1937.

Rademacher and Toeplitz. Von Zählen und Figuren. Springer. Berlin, 1933.

人名索引*

*《人名索引》及后《名目索引》中，所注页码为原书页码.为便于读者翻检，原书页码标在本书正文旁边。原书人名生卒年代有错漏之处，如 Argand 作(1768—?)，当为(1768—1822)；Desargues 作(1593—1602)，应为(1591—1661)；Goldbach 作(18 世纪)，乃(1690—1764)；Liouville 作(1823—1852)，应为(1809—1882)；Russell 作(1872—)，为(1872—1970)；均予校补.原书所注页码及其他错漏不一致之处，如 Borel 页码注为 221，应为 227；Exponential Function 页码注为 92，应为 189；Archimedes 页码注为 19，62，63，110，114，117，128，129，131，154，179，259，296，应为 19，63，114，116，117，128，129，132，154，179，192，249，259，296，297；索引中的 Tchebycheff 在正文中书为 Tcheby-shev；亦加补正.各校补之处，均不一一加注.——译者

名目索引